"ARTE Y MATEMÁTICAS". JORGE HOLGUÍN URIBE

TESIS GRADO MATEMÁTICAS PURAS
UNIVERSIDAD JAVERIANA
BOGOTÁ 1974
www.jorgeholguín.com
antonio.lazaro.alias@outlook.com

PRÓLOGO

GERMÁN PARRA
Artista, pintor, profesor, maestro.
Rue de la Terrasse. París. Francia.
18 Agosto 2018
germanparra@orange.fr

Descubrir la tesis de Jorge Holguín "Arte y Matemáticas", ha sido un valioso regalo y leerla un verdadero placer. Es apasionante, y es uno de mis temas favoritos. "La Divina Proporción o Número áureo (phi)". Esto ha sido para mí una gran sorpresa, pues no imaginaba, o no recordaba! que Jorge hubiera escrito sobre ese tema, pero tampoco me extraña viniendo de un Maestro en Matemáticas y de un Artista genial como lo fue Jorge.

Coincidencialmente yo había comenzaba a leer "Le Nombre D'Or, les clés du mystère" de Mario Livio, un Astrofísico que había trabajado durante 24 años con el telescopio espacial Hubble, Mario Livio, físico y matemático, uno de los pocos autores que se han ocupado y se ocupan hoy de este tema.

Haber escrito a sus 21 años sobre el Número de Oro para su tesis de grado en Matemáticas Puras en los años 70, lo ubica al lado no sólo de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, desde Pitágoras hasta Euclides de Alejandría (el fundador de la geometría, 300 años AC), de Leonardo de Pisa a Kepler, Fibonacci, Matila Ghyka y hasta Roger Penrose de nuestros días.

Todos ellos apasionados con las extraordinarias propiedades de este número, sin ser los únicos, biólogos, artistas, historiadores, arquitectos, psicólogos,y aún místicos, que se han extasiado delante de la ubicuidad del número de oro que ha inspirado más que otro número a pensadores de todas las disciplinas.

Jorge nos presenta un texto pedagógico de fácil comprensión ricamente ilustrado, todo sustentado en bases matemáticas y geométricas, enfocado en el arte.

Después de leerlo, difícilmente diremos que no nos gustan las matemáticas.

Como por arte de magia y con una pincelada genial termina su obra con Las Matemáticas como Solución a la Problemática del Arte Moderno (ver último capítulo).

Como profeta nos anuncia la revolución numérica el ordenador y todas sus posibilidades: El Artista creará la Idea y la obra será realizada por una máquina o por el propio consumidor.

Es seguro que detrás de los bellos, elegantes y novedosos movimientos de las coreografías de Jorge Holguin encontraremos escondida una ecuación de Matemática Pura.

German Parra. Paris 2018.

P.S. "La Lógica Humana nos ha sido impuesta por el mundo físico, ella es por lo tanto consistente con él: Las matemáticas se derivan de la Lógica y son consistentes con el mundo". Jeff Raskin. (Creador de Macintosh).

Notas*. Comparando el libro que comento de Mario Livio "Le Nombre ", el número áureo, con la obra "Arte y Matemáticas" de Jorge, cada vez me sorprendo más, Jorge se adelantó por años a Livio para hablar sobre ese tema, incluso las ilustraciones que Jorge emplea cuando habla de Le Corbusier aparecen en el libro de Livio, el título original en inglés es "The Golden: The Store of Phi, the World's Most Astonishing Number." This translation by arrangement with Broadway Books, imprint of Crown publishing Group, division of Penguin Random House LLC.2002. Traducido al francés Marzo 2018.

El libro de Jorge está ricamente ilustrado y aún más que el de este autor, cuando Livio hace la comparación y muestra como ejemplo un cuadro: "La última Cena", de Salvador Dalí. Que entre otras cosas él lo pintó con la ayuda de Matila Ghyka (autor rumano que figura en las dos Bibliografías) y fue uno de los primeros autores que sacó a la luz el tema de la Divina Proporción, o el número de oro, en 1927, Jorge pone otra ilustración de Dalí, "Leda Atómica" pintada en 1949. (la modelo fue Gala, su amada).

En términos generales el Libro de Mario Livio narra los orígenes históricos míticos y hasta esotéricos que se le han atribuido al Número de oro, y claro también los de Matemáticas y hace referencia a artistas que se pudieron haber inspirado en el Número de oro para crear.

Jorge en cambio sustenta toda la obra con base en Matemáticas y Geometría enfocándose en el Arte, habla hasta de las Teselaciones en la historia del Arte. Ver Cap. 102. Y es un genio cuando termina la tesis en Matemáticas, como Solución a la Problemática Del Arte Moderno. Cap. 152.
Transcribo dos textos cortos para compararlos con los de Jorge Holguín.

Atención: ¡Fueron escritos posteriormente a él!

Capítulo 1- Arte y Ciencia. Este se puede leer en primera página y darse cuenta que no está muy lejos del texto de Jef Raskin, creador del Macintosh:

La conclusión de Mario Livio dice: *"El número áureo phi, es un elemento de la Geometría inventado por el hombre, el cual no tenía la menor idea del mundo feérico hacia el que esta invención lo iba a conducir. Si la geometría no hubiera sido inventada jamás se habría hablado del Número áureo phi... Pero entonces, quien lo sabe? Podría éste haber surgido de un Programa Informático !*

Conclusión personal de Jorge HOLGUIN: En el alba de una civilización del ocio, el sentido mismo del Arte ha cambiado. Las Matemáticas, y en especial la permutación, definen un campo de posibilidades muy grande que puede dar una nueva razón de ser al arte. El arte estará unido a una serie de reglas

que constituyan "la idea". El artista creará la idea, y la obra será realizada por máquinas o por el propio consumidor. Pero olvidando la socialización del arte, las matemáticas nos ofrecen campos infinitamente más poblados que nuestra propia imaginación, en los que encontraremos realidades e irrealidades nunca soñadas.

Jorge ya estaba hablando y "visionando" los computadores! - Supe que mucho después en Simon Fraser University, B. C. Canadá, 1980... a Jorge le tocó dar las primeras clases sobre computadores. Cada alumno tenía su pantalla y la maquinaria ocupaba medio sótano. Era para trabajar, no para comunicarse.

"El artista creará la idea y la obra será realizada por máquinas o por el propio consumidor".

También habló de algoritmos, el mismo sistema que utilizan los ingenieros informáticos para crear aplicaciones etc. Estoy seguro que detrás de sus coreografías se esconde una ecuación matemática pura.

Anotaciones de Germán Parra. –

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

ARTE Y MATEMATICAS

Por

JORGE HOLGUIN U.

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO AL DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS DE LA UNIVERSIDAD JAVERIANA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TITULO DE MATEMATICO.

Bogotá - Colombia

Diciembre 1974

INDICE

CAPITULO I

ARTE Y CIENCIA

La ciencia es una forma racional de conocimiento. Decimos racional en el sentido Lukácsiano del término, es decir, como respuesta a los problemas que la naturaleza y la sociedad plantean al hombre. La ciencia aisla estos problemas y emprende la aventura de responder. Desde pulir una piedra o hacer fuego hasta los procedimientos más desarrollados de la física o la biología modernas todo es responder, construír modelos universales que faciliten la adaptación del hombre. Esta racionalización o conceptualización requiere sinembargo una buena distancia entre el sujeto y el objeto del conocimiento. Mientras Entre más precisa deba ser la respuesta, más complejo será es el sistema de aprehensión de ese objeto. Es decir que lo simple, una fórmula, una ley son el resultado de múltiples exploraciones y elaboraciones. Hay aquí dos vías: una descendente que va desde la superficie de la realidad cada vez más hacia el fondo, hacia la estructura y otra ascendente, porque las estructuras más comprensivas son también los grados más altos de abstracción a partir de lo cotidiano. Hablamos de abstracción y de estructura y con esto ya estamos tocando muy cerca el tópico de las relaciones entre el hombre y su entorno. Parece como si el hombre total, el individuo y la especie perdieran su carácter unitario al ser atravesados por diversos modelos (Los de las ciencias físicas, los de las ciencias bióticas, los de las ciencias sociales); las cuales por otra parte constituyen una fijación más o menos arbitraria en el proceso del ser. Todas las ciencias particulares tienden inevitablemente a la diacronía, de tal manera que la representación del hombre que surge de ellas resulta siempre tanto más exacta cuando más parcial. Aquí coinciden varios factores: en primer lugar el método mismo de las ciencias requiere una determinación bastante clara de su objeto de estudio. En segundo lugar el medio histórico en que se han desarrollado las ciencias ha hecho de ellas útiles del conocimiento, pero igualmente instrumentos decisivos para la expansión de un sistema económico de producción erigido sobre lo que se ha llamado ~~la~~ "La libre empresa", la libertad individual, la competencia, la división social del trabajo etc. No vamos a decir que el arte ha escapado a estos mismos factores determinantes. Al contrario, es probablemente una de las expresiones sociales más contaminadas de ideología. Ocurre sinembar go que en el proceso de producción estética se da la máxima tensión en el enfrentamiento de dos totalidades: la totalidad vivida de lo cotidiano, y la totalidad intuída del cosmos. El resultado es siempre una FORMA tanto más coherente cuanto más sintética. La coherencia interna de la obra arte y su extraordinaria capacidad de proyección permiten ampliar hasta la dimensión más alta los rasgos de una sociedad, exhibir sus contradicciones y devolver todo ese efecto hacia la vida de un hombre. "Los Budenbroock" por ejemplo, cuenta la vida de una familia alemana particular y simultaneamente, a través de los mismos personajes (nunca despojados de su individualidad), cuenta la historia de la burguesía alemana a comienzos de siglo.

Entre las ciencias pienso que solo la matemática trabaja mediante un procedimiento similar en virtud del cual cualquier fórmula entre más general más exactamente aplicable es a todos los casos particulares que comprende.

El arte es lo propiamente humano, la observación de la realidad como forma, es decir como organismo. Es la respuesta a un sentimiento permanente de unidad, a un llamado cósmico. Por eso es dionisíaco. Un sonido, una palabra, un color poseen un cierto valor jurídico, institucional; el arte los rescata, eligiéndolos y disponiéndolos, en cuanto formas, en una forma nueva que es cada obra de arte, distrayéndolos en su utilidad inmediata y convencional. Les presta en cambio utilidad en relación con una potencia más fuerte y más permanente, cual es la aproximación a lo orgánico, al mundo y al hombre como totalidad progresiva y dinámica. Es la suma actualidad y también la no actualidad: por eso pasado y futuro pierden en el proceso estético su aspecto también convencional de algo que pasó, de algo que va a suceder y se vuelven signos constitutivos de lo humano; la música de Stockhaunsen quiere decir que una relación de sonido está integrada en la vida cultural de la especie humana; que ha tenido valor, condicionado desde luego históricamente y que seguirá teniéndolo es decir que sobre ella se edificarán nuevas relaciones. El sonido queda extraído no de su lugar histórico sino de su utilidad inmediata; de su reductibilidad y sobre todo de su presencia indiferente en el universo de las cosas. Se convierte, pues, en una particularidad y como tal en un momento de lo orgánico, de lo biótico, de lo social. Cuando Marx habla de alineación menciona no solo la explotación cuantificable del obrero por el dueño del capital sino la más grave consecuencia cultural representada por la pérdida cada vez más acentuada del valor formal. Para quien no tiene que comer, el alimento aparece como la solución de una necesidad y no como una forma (1).

Lukács plantea el ejemplo de una araña a la que se le pone una mosca en su tela. La araña no advierte que sea esta la misma mosca que ella suele atrapar, es decir no tiene la capacidad de abstraer la forma, la estructura de la mosca, y por lo tanto de combinar sus posibilidades de acción frente a ella (2). No tiene la posibilidad de producir, de transformar. Esto es lo que significa que el arte es una función propiamente social. Para decir esto es preciso superar la falsa dualidad forma-contenido. La forma es el contenido mismo en cuanto es extraído por el hombre del entorno y evaluado en su organicidad, en carácter de ordenado frente a lo caótico. Todos los trabajos de Levi Strauss acerca de la magia parten de esa hipótesis en virtud de la cual el hombre no cesa de reconocer su medio, de cerebralizarlo y disponerlo de acuerdo con un programa simbólico cuya tendencia es inevitablemente la construcción, o sintaxis o el trabajo o la producción, es decir un cierto grado de permanencia que aún en

(1) Marx, Carlos y Federico Engels. Escritos sobre arte. (Barcelona: Editorial Península, 1969), pg. 49.

(2) Holz, Hans Heinz y otros. Entrevistas con Lukács. (Madrid: Alianza Editorial, 1969), pg. 35.

sociedades míticas parece presentir el curso histórico y la adaptación cada vez más definitiva del hombre en la naturaleza. El totemismo por ejemplo, dice Levi Strauss, implica el reconocimiento de una serie cultural discontinua (la comunidad), una serie natural, también discontinua, (la naturaleza, los animales, la vegetación) y de un término de relación posible entre las dos series (3). También el problema de Dios surge en primer lugar como intento de respuesta a un problema de orden y de causalidad.

De dónde se deriva esta vocación ordenadora?

Probablemente del trabajo, es decir de la transformación del medio, de lo que Piaget (4) llama las funciones de asimilación y acomodación.

El hombre se alimenta del exterior y transforma ese alimento en si mismo, o sea, en lo orgánico. De otra parte la reiterada necesidad de acomodarse para asimilar plantea por primer vez (en el niño o en el hombre primitivo) la categoría de lo valioso. Un instrumento es valioso y otro no. Pues bien, -

(3) Leach, Edmund. Lévi-Stravss: antropólogo y filósofo. (Barcelona: Editorial Anagrama, 1970), pg. 49.

(4) Piaget, Jean. Seis estudios de Psicología. (Barcelona: Barral Editores, 1973), pg. 63.

cuando su autorreconocimiento como organismo le haga proyectar esta categoría de lo valioso al conjunto exterior surgirá el problema del sentido de la vida es decir de todas las posibilidades de asimilación y adecuación y por lo tanto el problema del orden, el problema de la relación entre sus estructuras mentales lógico matemáticas y una necesaria estructura correspondiente en el exterior.

La ciencia es una cuestión de límites; el arte como todo juego es una función de lo absoluto; es decir la tensión máxima que pueden soportar esos mismos límites. Por eso el arte en la Edad Media fué un trabajo indiferente y anónimo, porque toda la ideología del feudalismo estaba proyectada hacia el absoluto. San Agustín habla de la ciudad terrena y la ciudad de Dios para señalar el punto donde la historia se disuelve en eternidad. Con el Renacimiento van a converger dos problemas que afectarán por igual a la estética. El primero de ellos es la relativización del mundo; Dios mismo no desaparece del paisaje cultural pero ahora palpita dentro de él como una fuerza en vez de estar afuera sometiendo al mundo. En segundo lugar, uno de los más fuertes y decisivos síntomas culturales del capitalismo, desprendido desde luego de esta relativización que mencionamos, es el de la autonomía de lo particular. El orden estipulado por la cosmovisión cristiana, asimilado a lo infinito, intemporal, espacial, se convierte en un nuevo tipo de sistema autorregulado y proporcionado de manera que cada estructura particular puede definirse como Aristóteles por su género y por su diferencia específica; es decir por su particular valor y por su ajuste al orden total. Las teorias económicas de los ingleses no hacen sino reconocer este mismo fenómeno en el nivel de las transacciones. O sea que cada actividad económica particular es automáticamente ordenada por el conjunto y por su relación con todas las demás. Los resultados de esta Weltanschaung desde el punto de vista estético fueron:

1º. La independización definitiva del arte como actividad.
2º. Còmo corolario de este primer aspecto, todo el arte de la época moderna progresa, al lado de la ciencia, descubriendo y aplicando técnicas nuevas problematizando más que nunca la materia de su trabajo. El espacio armónico del Renacimiento empieza a distorsionarse en el manierismo, a alargarse y romperse en el barroco. El color, la luz, la línea, la profundidad son ahora temas de la pintura; hasta la época más reciente cuando se detonan todos los viejos materiales. Qué dice este arte acerca de nuestro tiempo?. Para, algunos, calificarlo de decadente es haber agotado las respuestas. Yo pienso que hoy como en el tiempo de Da-Vinci, como en el Romanticismo, como en el arte Paleo-Cristiano, el arte cumple humildemente su función de apuntar hacia la unidad del ser. Miguel

Angel o Da-Vinci lo hicieron pintando el equilibrio de un mundo que empezaba a ser burgués. Goya lo hizo desnudando la corrupción fisonómica de una aristocracia española que estaba cada vez más fuera de la historia; Balzac lo hizo disecando el período de asentamiento de la burguesía. Los románticos lo hicieron probando que el último refugio del hombre está en su propia alma, en sus pasiones. La novela moderna, la de este siglo, se limita a decirnos que es imposible ser siquiera un anti-héroe, y que es preciso buscar en los residuos, en los ghettos, en los sueños, en lo más febril, para encontrar la unidad de lo humano.

CAPITULO II

PROPORCIONES

> "... Pero es imposible combinar dos cosas sin una tercera; es preciso que exista entre ellas un vínculo que las una. No hay mejor vínculo que el que hace de sí mismo y de las cosas que une un todo único e idéntico. Ahora bien, tal es la naturaleza de la proporción".
>
> Platón, "Timeo".

Historia de la teoría de la proporción.

A partir del Renacimiento existe una literatura constante dedicada a la teoría de la proporción; pero la única evidencia escrita (1) que sobrevive de la Antigüedad es la obra del arqui

---

(1) Nosotros estudiaremos los sistemas de proporción basándonos principalmente en la evidencia escrita y directa, es decir, en los libros que se han escrito sobre la teoría de la proporción. Existen otros tipos de evidencia que nos ayudarán cuando los tratados sobre los sistemas de proporción utilizados en algún período sean escasos: El primero consiste en la evidencia escrita e indirecta; la literatura matemática y filosófica proporciona una clave para interpretar las ideas que sobre la proporción se tuvieron en los pueblos de los que no tenemos ninguna evidencia escrita y directa.

Finalmente, existe la evidencia arqueológica, constituída por las ruinas de los edificios y demás obras de arte que han sido descubiertos. Podría parecer que el análisis de las proporciones reales de estas obras fuera el camino más directo para el estudio de las proporciones utilizadas por el autor. Pero se ha visto que las dificultades de un análisis correcto son muy grandes, y así, por ejemplo, tenemos innumerables análisis de las proporciones del Partenón donde se pretende demostrar que tecto romano Marco Lucio Vitruvio: "De architectura" y que en las traducciones posteriores ha sido llamado "Los diez libros de la arquitectura". La obra de Vitruvio no puede considerarse como un tratado sobre la proporción sino mas bien como una exposición de normas técnicas para la construcción de edificios (torres, murallas, templos, casas) en la cual indica, algunas veces, las proporciones que deben tener estas construcciones.

En el estudio de las proporciones nos interesa preferentemente su aspecto estético. Mucho de lo que Vitruvio escribió sobre la proporción se refiere a la relación entre las formas y tamaños de los objetos considerados desde un punto de vista bastante diferente. Cuando por ejemplo habla de las simetrías (2) y proporciones de las catapultas (3), no expone precisamente su interés por la estética de la matanza. Simplemente nos dice como construír una catapulta de manera que lance la carga lo más lejana y precisamente posible.

Vitruvio basa todos sus sistemas de proporción en el cuerpo humano, y para probar la armonía y perfeccción de este, describe cómo un hombre con los brazos levantados y los pies separados encaja perfectamente en el círculo y el cuadrado: "En un hombre tendido en decúbito supino, con las manos y los piés extendidos, si se tomase como centro el ombligo, trazando

---

en la construcción de éste se usaron diferentes sistemas de proporción. Por ello esta clase de evidencia es de poco crédito y solo debe tenerse en cuenta cuando está apoyada en alguna evidencia de otro tipo. De este modo, el análisis que Hambridge hace del Partenón (ver pg.) parece válido porque el sistema de proporción que este autor reconstruye está íntimamente ligado con la clase de problemas matemáticos que interesaban a los griegos.

(2) En el texto original, en latín, de Vitruvio aparece "symmetriae", que generalmente ha sido traducido como "simetrías"; sinenbargo, algunos autores suelen traducirlo como "proporción" y otros como "uniformidad".

(3) Vitruvio, Marco Lucio. <u>Los diez libros de la arquitectura</u>. (Barcelona: Editorial Iberia, 1965), pg. 277.

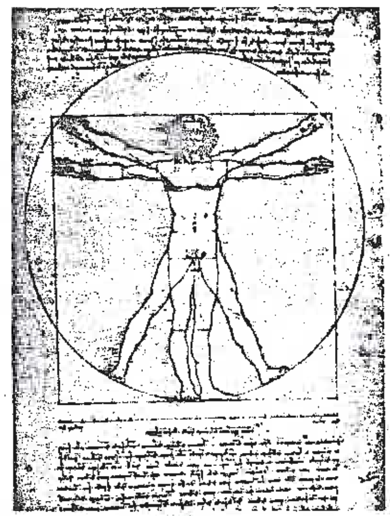


Fig. 1

con el compás un círculo, este tocaría los dedos de ambas manos y ambos pies; y lo mismo que se adapta el cuerpo a la figura redonda, se adapta también a la cuadrada; por eso si se toma la distancia que hay de la punta de los pies a lo alto de la cabeza, y se confronta con la de los brazos extendidos, se hallará que la altura y la anchura son iguales, resultando un cuadrado perfecto. Luego si la naturaleza dispuso el cuerpo del hombre de tal manera que se correspondan las proporciones de cada miembro con el todo, con razón quisieron los antigüos que existiera también en las obras perfectas esa misma correspondencia de medidas con la obra entera. Y por eso, si en todas las obras regularon de este modo las medidas, observaron este buen orden sobre todo en los templos, en los cuales lo bueno y lo malo ha de quedar expuesto durante mucho tiempo al juicio de la posteridad..." (4).

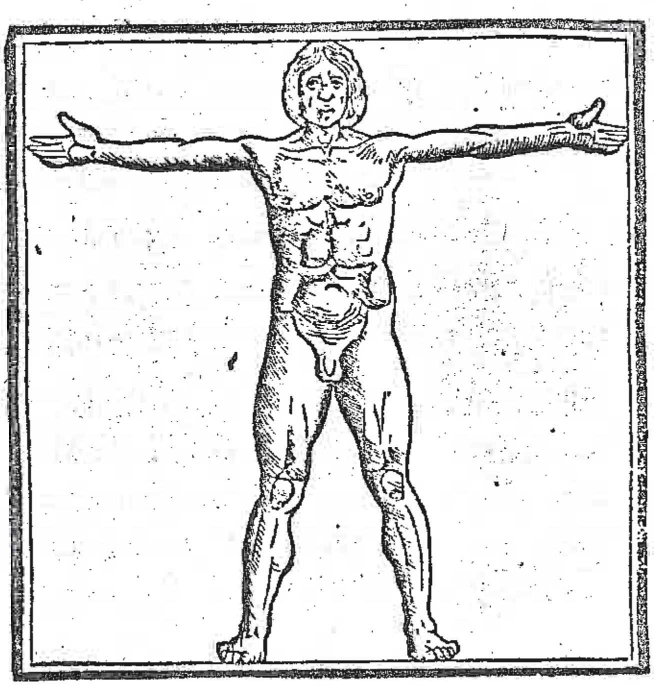


Fig. 2.

En la figura 1 vemos la interpretación que del texto de Vitruvio hizo Leonardo Da-Vinci. En las figuras 2 y 3 se muestra el "homo ad quadratum" y "ad circulum" que Fra Giocondo ejecutó para la edición de 1511 de la obra de Vitruvio.

Acerca de las proporciones utilizadas por los griegos, Vitruvio agrega en su Libro tercero: "La regla de las medidas en toda obra la tomaron de las diferentes partes del cuerpo humano, tales como

(4) Op. Cit., pg. 68.

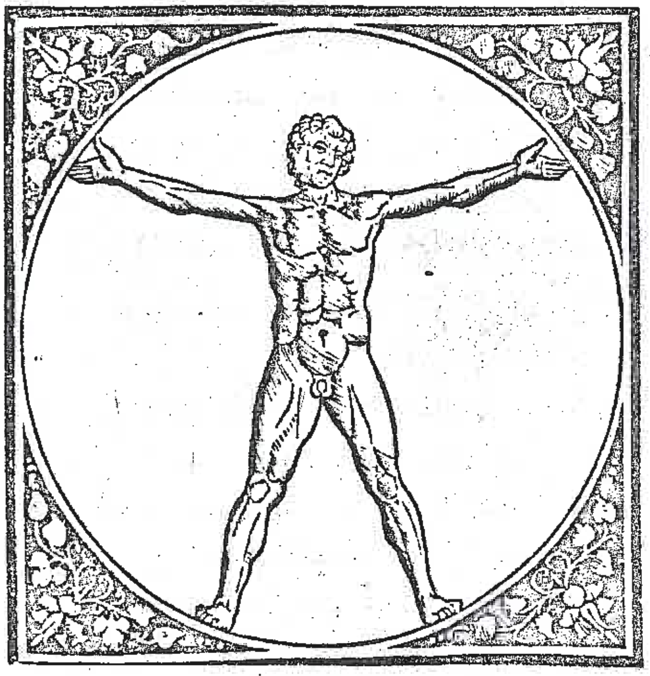


Fig. 3.

el dedo, el palmo, el pié y el codo" (5). Y luego expone el origen mítico de las formas y proporciones de las columnas de los tres órdenes principales; jónico, dórico y corintio.

Poco se conoce sobre las proporciones utilizadas durante la Edad Media. Santo Tomás de Aquino, la gran figura del siglo XIII, heredó de Grecia y de San Agustín la teoría de que la proporción es indispensable para la belleza. En "Suma Teológica" él dice: "La belleza exige tres requisitos. Primero cierta plenitud o perfección, ya que cualquier cosa incompleta es, por consecuencia, fea; segundo, la debida proporción o armonía, y, tercero, claridad para que las cosas brillantemente coloreadas sean llamadas bellas" (6).

Aunque Santo Tomás no entra en detalles técnicos, si sugiere que el artista medieval debe preocuparse del problema de la proporción al construír un edificio o al pintar un cuadro.

Los indicios mas importantes sobre la teoría de la proporción medieval son los dados por la historia de los estudios matemáticos. A partir del siglo XII empezaron a aparecer en Europa traducciones de los libros de Euclides, y el interés

---

(5) Op. Cit., pg. 82.

(6) Gadol, Joan. Leon Battista Alberti: Universal man of the aerly Renaissance. (Chicago: The University of Chicago Press, 1969), pg. 81.

que estas traducciones despertaron se ve claramente en la arquitectura de la época. La relación de la teoría de la proporción gótica con los trabajos de Euclides es muy lejana, pero lo que los arquitectos de este período sí aprendieron de Euclides fué la construcción y el uso de algunas figuras geométricas: diseño triangular, estructura de los rosetones, etc.

Es escasa la aportación de los matemáticos medievales a la teoría de la proporción, pues hubieron de asimilar lo que habían aprendido de Euclides y de los árabes. La excepción fué Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci (hijo de Bonaccio), que aunque tiene poca importancia en las matemáticas, será de gran interés para nosotros por sus estudios sobre la sección áurea.

La única descripción de los métodos góticos de proporción que se conserva es el comentario que Cesariano hizo a su traducción (1521) de la obra de Vitruvio (7). Cesariano dá tres reglas para la construcción de iglesias. La primera fija el ancho y el largo de la planta de la iglesia mediante el "vesica piscis"; la segunda proporciona el método de división del plano en vanos iguales, y la tercera determina las alturas de las diferentes partes mediante triángulos equiláteros.

Durante la Edad Media, aunque el cuerpo humano está rodeado de restricciones filosóficas y religiosas, también se buscan en él las proporciones artísticas. Cennino Cennini, pintor florentino del siglo XIV y principal exponente de la teoría de la proporción medieval, restringe las proporciones al hombre: "la mujer y los animales, por tener poca significan-

(7) Schofield, P. H. <u>Teoría de la proporción en arquitectura</u>. (Barcelona: Editorial Labor, 1971), pg. 102.

cia espiritual, no tienen proporciones" (8).

Cennini tenía en mente un sistema de proporciones basado no en el estudio del cuerpo físico, sino en un deseo de dibujar el cuerpo humano según el círculo (figura geométrica perfecta) (9) y el número tres (número de la Trinidad). El módulo de su sistema de proporciones era la cabeza (por ser el asiento de la mente y del espíritu) descrita por medio de tres círculos con centro en la raiz de la nariz. Estos tres círculos dieron a los artistas Bizantinos e Italo-Bizantinos todas las dimensiones que necesitaban. Lo único que tuvieron que agregar al trabajo de Cennini fué una nueva dimensión para el halo de las figuras de los santos (proporcional a la importancia del santo), y la altura del cuerpo humano, que concluyeron, debía ser nueve (que por ser el cubo de tres es otro número "significativo") veces el módulo (la cabeza). (10).

Al adquirir la forma y el número tal tarea espiritual, la estructura ósea y muscular del cuerpo es pasada por alto, y es así como la única referencia que cennini hace a la anatomía humana es cuando dice que el hombre tiene una costilla menos que la mujer pues, la perdió al crear Dios a Eva. (11).

---

(8)

(9) En la Edad Media el círculo era considerado como la figura geométrica más perfecta pues se creía que esta era la forma que tenían la tierra, los astros, los planetas...

(10) En promedio la altura del cuerpo es de ocho cabezas; y el que los Bizantinos hayan tomado una altura equivalente a nueve cabezas explica el que las figuras de sus pinturas sean alargadas.

(11) Gadol, pg. 81.

La principal exposición de la teoría de la proporción del Renacimiento es la del arquitecto italiano del siglo XV León Battista Alberti en "De re aedificatoria", escrita entre 1450 y 1472 y publicada por primera vez, en forma póstuma, en 1485.

Para comprender la teoría de Alberti es necesario recordar el axioma principal de los arquitectos del Renacimiento: La arquitectura es una ciencia, y toda parte del edificio debe estar integrada en un mismo sistema matemático de razones. Estas razones no puede aplicarlas libremente el artista, sino que deben estar de acuerdo, al igual que durante la Antigüedad y la Edad Media, con "concepciones superiores", y el edificio debe ser espejo de las proporciones humanas. Como el hombre es imagen de Dios y las proporciones de su cuerpo están hechas por voluntad divina las proporciones arquitectónicas expresan el orden cósmico. (12).

Alberti dedica el séptimo capitulo de su obra a la construcción y decoración de los edificios sagrados. Recomienda, como primera medida, la utilización del círculo en el planeamiento de las iglesias; similarmente, aconseja otras nueve figuras geométricas: el cuadrado, el exágono, el octágono, el decágono, y el dodecágono. Las cuales pueden determinarse por medio del círculo; explica también como hallar las longitudes de los lados conociendo el radio del círculo en que se hallan inscritas. (fig. 4) Además de estas seis figuras el menciona tres desarrollos del cuadrado: el cuadrado y medio, el cuadrado y tercio y el cuadrado doble.

---

(12) Wittkower, Rudolf. Architectural Principles in the age of humanism. (New York: Random House, 1965), pg. 16.

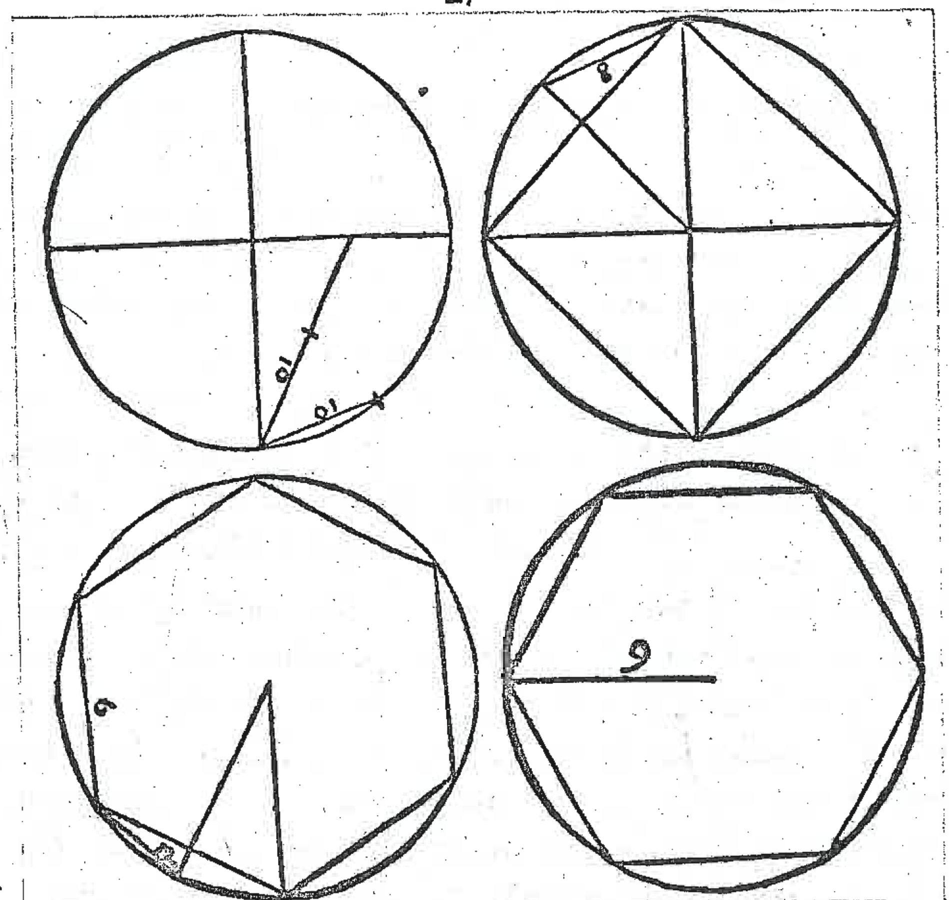


Fig. 4. Construcción del cuadrado y el exágono. (De la edición de 1550 de la obra de Alberti "De re aedificatoria").

Alberti es explícito acerca del carácter de la iglesia ideal. Debe ser el ornamento mas noble de la ciudad y su belleza debe sobrepasar la imaginación. Es la belleza que despierta sensaciones sublimes y piedad en la gente. Pero, cómo hace para conseguirse una belleza que produzca efectos tan poderosos?. Según la definición matemática de Alberti (basada en la de Vitruvio), "belleza consiste en una integración racional de las proporciones de todas las partes del edificio de tal manera que cada parte tenga fijada su forma y tamaño y nada pueda ser añadido o quitado sin destruír la armonía del todo" y Alberti concluye "A falta del equilibrio geométrico en el que todas las partes están armoniosamente rela cionadas como los miembros de un cuerpo, la divinidad no puede revelarse" (13).

Alberti, en su definición, distinguió tres categorías: "numerus" (número: que nada puede ser añadido o quitado), "finitio" (medida: que nada puede ser aumentado o disminuído de tamaño) y "collocatio" (colocación o arreglo: que nada puede ser puesto en otro lugar).

La categoría que Alberti considera mas importante es la segunda y tendría un papel muy importante en la teoría y práctica de la arquitectura del Renacimiento.

En cuanto al "numerus", Alberti todavía tiene la concepción Medieval del simbolismo numérico. El declara por ejemplo que hay un número par de soportes en los edificios de la antigüedad porque los animales se apoyan sobre un número par de patas. Similarmente, las aperturas de los edificios (puertas, ventanas) se encuentran en número impar pues la boca es la sola apertura de la cara (14). La única diferencia entre Alberti y sus antecesores de la Edad Media consiste en que Alberti busca el simbolismo numérico en la naturaleza, mientras que los artistas de la Edad Media lo buscaban en la Trinidad, los Doce Apóstoles, los Diez Mandamientos, etc.

Para cumplir con la "collocatio" de su definición Alberti hace dos sugerencias solamente: la primera es que el artista debe buscar una correspondencia entre las partes del edificio; o sea: lo que está a la izquierda debe responder a lo que está a la derecha, lo que está arriba a lo que está abajo, esto es lo que hoy conocemos como simetría. La segunda es que el arquitecto puede seguir en el "arreglo" de las partes del edi

---

(13) Gadol, pg. 7.

(14) Op. Cit. pg. 108.

ficio algunas de las reglas que Alberti estableció para la "finitio".

La "finitio" de un edificio es la medida de éste. Para la finitio de plazas y lugares abiertos, donde se consideran únicamente el largo y el ancho, Alberti recomienda la proporción 1: 1 del cuadrado perfecto y las proporciones de los acordes simples del sistema griego de armonía musical. Para determinar el largo y el ancho, el arquitecto debe usar las proporciones 2:3 y 3:4 para las habitaciones cortas; 2:1, 4:9 y 9:16 para habitaciones medianas, y 3:1, 3:8 y 4:1 para habitaciones largas.

En la tabla siguiente se señalan los intervalos musicales a los que corresponden estas razones, con sus antigüos nombres en latín que fueron muy comunes en la literatura del Renacimiento sobre la armonía musical.

Razón	Nombre latino	Intervalo musical
1:1		Unísono
4:3	Sesquitertius	Cuarta
3:2	Sesquialter	Quinta
16:9		
2:1	Duplus	Octava
9:4		
8:3		Onzava
3:1	Triplus	
4:1	Cuadruplus	Quinzava

Todas estas razones dadas por Alberti corresponden a intervalos musicales excepto dos, 16:9 y 9:4 que equivalen respectivamente a $(4:3)^2$ y $(3:2)^2$.

Según Alberti "Las razones son o bien innatas (provenientes directamente de la armonía musical) o bien obtenidas de otras proporciones de manera determinada y regular (elevándo las al cuadrado por ejemplo)" (15).

Para trabajar en espacios en que se consideran tres dimensiones (ancho, largo y altura de los muros) Alberti recomienda utilizar progresiones de tres números en las cuales la razón entre cualquier par de números pertenezca a la lista de razones dada anteriormente. Algunas de estas progresiones de tres números son: 2:4:6, 2:3:6, 2:4:8, etc. En la siguiente tabla se comprueba que la razón entre cada par de números de las progresiones dadas anteriormente corresponde a uno de los intervalos musicales de la lista.

		Intervalo musical
2;4;6	2:4	Duplus (2:1)
	4:6	Sesquialter (2:3)
	2:6	Triplus (1:3)
2:3:6	2:3	Sesquialter (2:3)
	3:6	Duplus (2:1)
	2:6	Triplus (1:3)
2:4:8	2:4	Duplus (2:1)
	4:8	Duplus (2:1)
	2:8	Cuadruplus (4:1)

Generalmente el mas pequeño de los tres números representa el ancho de la habitación, el mayor la longitud y el número intermedio la altura, aunque posteriormente Alberti dice:"algunas veces, por la conveniencia de las estructuras, estos números pueden intercambiarse" (16).

---

(15) La disonancia de 16:9 y de 9:4 es señalada por Wittkover como prueba de que Alberti no intentó traducir la música demasiado literalmente a la arquitectura. (Wittkover, pg. 102).

(16) Scholfield, pg. 73.

Alberti da también algunas progresiones de cuatro números 2:3:4:6, por ejemplo. Y acerca de esto, Paul Henri en su libro "La Pensée de León Battista Alberti" dice: "Piensa sinembargo en series de cuatro números, los cuales aún permaneciendo traducibles a intervalos musicales, se hacen inaplacables en la arquitectura, o solo podrían serlo en una arquitectura no euclidea, una arquitectura de cuatro dimensiones" (17).

Una explicación que puede parecer simple pero que seguramente es mas probable es que Alberti, al dar progresiones de cuatro números, ofrece alternativas para la altura de las habitaciones.

Dentro de la teoría de la proporción del siglo XVI se destaca el arquitecto italiano Palladio (1508-1580). En su tratado: "Los cuatro libros de la arquitectura" se encuentran muchas de las ideas de Alberti; por ejemplo cuando dice: "La belleza resultará de la forma y la correspondencia del todo con las partes, de las partes con respecto a ellas mismas, y de estas a su vez con relación al todo; que la estructura aparezca como un cuerpo entero y completo, donde cada miembro concuerde con el otro..," (18). Sinembargo, Palladio lleva la definición de Alberti un paso más adelante cuando en su segundo libro, al hablar sobre lasdisposición de las habitaciones en el edificio, dice: "... pero las habitaciones grandes junto a las medianas, y estas junto a las pequeñas, deben estar distribuídas de tal forma, como ya dije en otra parte, que una parte de la fábrica corresponda con la otra y; que el cuerpo del edificio tenga en sí mismo una tal concordancia en sus miem-

---

(17) Michel, Paul Henri. La Pensée de León Battista Alberti. (París, Editions Gallimard, 1930), pgs. 454-455.

(18) Palladio. The four books of architecture. (New York: Dover Publications, 1965), pg. 1.

bros que haga el todo bello y gracioso" (19).

Palladio no dá indicaciones muy precisas sobre la manera de obtener esta "gracia y belleza" en los edificios, sinembargo, en las alzadas de construcciones que él inserta en su tratado se han encontrado razones tales como 2:1, 3:2 y otras de las razones armónicas recomendadas por Alberti, en el capitulo XXIII de su primer libro Palladio indica que para la habitación sea "perfecta" debe seguirse una de las siguientes tres reglas: i) la altura debe ser la media arítmética entre la longitud y el ancho(si una habitación tiene seis pies de ancho y doce de largo, su altura debe ser de nueve pies pues(6+12)/2= 9; ii) la altura debe ser la media geométrica entre la longitud y el ancho (en las progresiones geométricas el primer término es al segundo como el segundo es al tercero, a/b=b/c; si una habitación mide cuatro por nueve pies, entonces su altura debe ser de seis pies puesto que 4/6=6/9). iii)la altura debe estar en proporción armónica con respecto a la longitud y al ancho (Tres números a, b y c están en proporciones armónicas si cumplen la relación $\frac{b-a}{a} = \frac{c-b}{c}$. Si, por ejemplo, una habitación mide seis por doce pies, debe tener una altura de ocho pies pues $\frac{8-6}{6} = \frac{12-8}{12}$).

Llegados a este punto constatamos una extraña coincidencia entre las medidas que recomienda Palladio y las que según la Biblia tenía el templo de Salomón: (fig.10).

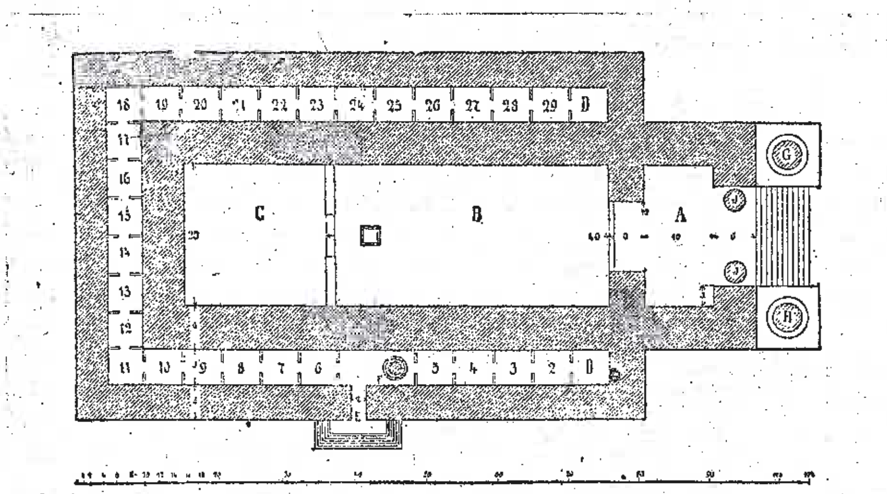
	Largo	Ancho	Alto	
Vestíbulo	10	20	#	codos
Hecal (Santo)	40	20	30	codos
Debir (Santísimo)	20	20	20	codos

(#) No dice nada sobre la altura del vestíbulo.

(19) Op. Cit., pg. 38.

Notamos que la altura del Hecal y del Debir (y probablemente la del vestíbulo) es la media aritmética entre el largo y el ancho. Esta coincidencia puede ser fruto de la casualidad solamente pero debemos recordar que los cruzados, buscaron en Palestina las ruinas del templo de Salomón y trataron de reconstruír los planos para llevarlos a Europa; y es así como muchas iglesias Europeas tienen varias de las características de este templo; planta en forma de doble cuadrado, etc. (ver pág. 64).

Sinembargo, los primeros cruzados parece que no eran muy inteligentes, y creyeron que el templo de Salomón era la mezquita de Omar (situada a escasos veinte metros del templo) que es de planta octagonal, y fúe así como en Europa se empezaron a construír iglesias octagonales hasta que nuevas expediciones rectificaron el error.



A. Vestíbulo
B. Hecal
C. Debir

Fig. 10 Planta del Templo

En el capítulo XIII de su primer libro, Palladio se ocupa, basándose en lo establecido por Vitruvio, de las proporciones de las columnas (20). Al igual que Vitruvio, toma como módulo

(20) Acerca del origen mitico de las formas y proporciones de las columnas de los dintintos órdenes, Vitruvio dice:"Doro

hijo de Eleno y de la ninfa Orseida, rey de toda la Acaya y de todo el Peloponeso, hizo construír un templo a Juno en la antigüa ciudad de Argos; dicho templo tuvo casualmente columnas del estilo que llamamos dórico; después en otras ciudades de Acaya, edificó otros similares, sin que por el momento se hubieran dictado reglas sobre las proporciones justas. Mas tarde, los atenienses, consultando el oráculo de Apolo en Delfos y de acuerdo con sus respuestas enviaron a Ion, a fundar trece ciudades, la región donde se fundaron se llamó Jonia en honor a Ion, su jefe. Levantaron templos, como el dedicado a Apolo, según el modelo de los que habían visto en Acaya. Como desconocían las proporciones que debían dar a las columnas del templo, resolvieron tomar la relación que existe entre la longitud del pié y la altura del cuerpo de un hombre; y se encontró que ésta relación es 1/6, o sea: la altura de un hombre es seis veces la longitud de su pié; transfirieron esta relación a la columna, dando a esta una altura igual a seis veces el grueso de su imoscapo, incluído el capitel.

De esta suerte la columna dórica, proporcionada según la anatomía masculina comenzó a dar a los edificios solidez y belleza, se convirtió en la encarnación de la fuerza y de la belleza masculina.

Algún tiempo mas tarde, deseando construír un templo en honor de Diana y buscando la manera de dar proporción a sus columnas, siguieron los mismos principios anteriores, e hicieron su relación de altura sirviéndose del hecho de que la altura de una mujer es ocho veces la longitud de su pié. Hicieron el diámetro de la columna igual a la octava parte de su altura; seguidamente imaginaron ponerle la base a manera de calzado; tallaron luego volutas a una y otra parte del capitel, queriendo imitar el cabello que cae en bucles a derecha e izquierda, y por medio de cimacios y festones como cabellos arreglados sobre la frente, adornaron la parte anterior de los capiteles. Además trazaron estrías a lo largo del fuste de la columna a imitación de los pliegues de la túnica de las matronas, esta columna se llamó jónica pues sus inventores habían sido los jonios.

Finalmente veamos como se originó la columna del tercer orden: el corintio. La columna corintia representa la delicadeza de una doncella, cuyo talle, por su edad, es mas fino. Se cuenta que la invención del capitel de este orden fué debido a las siguientes circunstancias: Una doncella de Corinto, aún núbil, enfermó y murió; su nodriza fué a poner junto a su tumba, en un canastillo, algunos de los objetos que a la muchacha más habian agradado en vida. Por una casualidad vino a quedar el canastillo sobre una raiz de acanto. La raiz comenzó, en la primavera, a echar tallos y hojas que fueron creciendo alrededor el diámetro de la columna en la base: "Yo no usaré de ninguna medida característica a alguna ciudad, como el palmo o el pié, pues estas medidas difieren mucho de una ciudad a otra; pero imitaré a Vitruvio quien divide las columnas de acuerdo con el diámetro de la base que él llama módulo" (21). Sinembargo, Palladio toma en la columna Corintia el módulo igual a la mitad del diámetro en la base y dice que en este orden es más sencillo dar las medidas con este módulo.

En la siguiente tabla se encuentra el resumen de las proporciones de los diferentes órdenes según Palladio.

Orden	Módulo	altura	altura del capitel.	separación entre dos columnas
Toscano	diámetro en la base.	7 mods.	1/2 mods.	4 mods.
Dórico	1/2 del diámetro en la base.	15 mods.	2 mods.	51/2 mods.
Jónico	diámetro en la base.	9 mods.	1/2 mods.	2 1/4 mods.
Corintio	diámetro en la base.	9 1/2 mods.	1 1/6	2 mods.
Compuesto)latino)	diámetro en base.	10 mods.	1 1/6	1 1/2 mods.(22)

---

de la canastilla, y por efecto de la presión que ejercían los objetos que se hallaban en la cesta, fueron doblándose, produciendo los volantes de las volutas. El escultor Calímaco acertó a pasar por allí, vió el canastillo y se fijó en la belleza de esta nueva modalidad, la reprodujo en las columnas que hizo después para los Corintios y estableció las proporciones con arreglo a ese modelo".

(21) Palladio., pág. 13.

(22) El orden compuesto es el formado por la mezcla de dos cualesquiera de los siguientes órdenes: dórico, jónico y corintio. Palladio destaca como el más armónico el compuesto llamado latino; formado por el jónico y corintio.

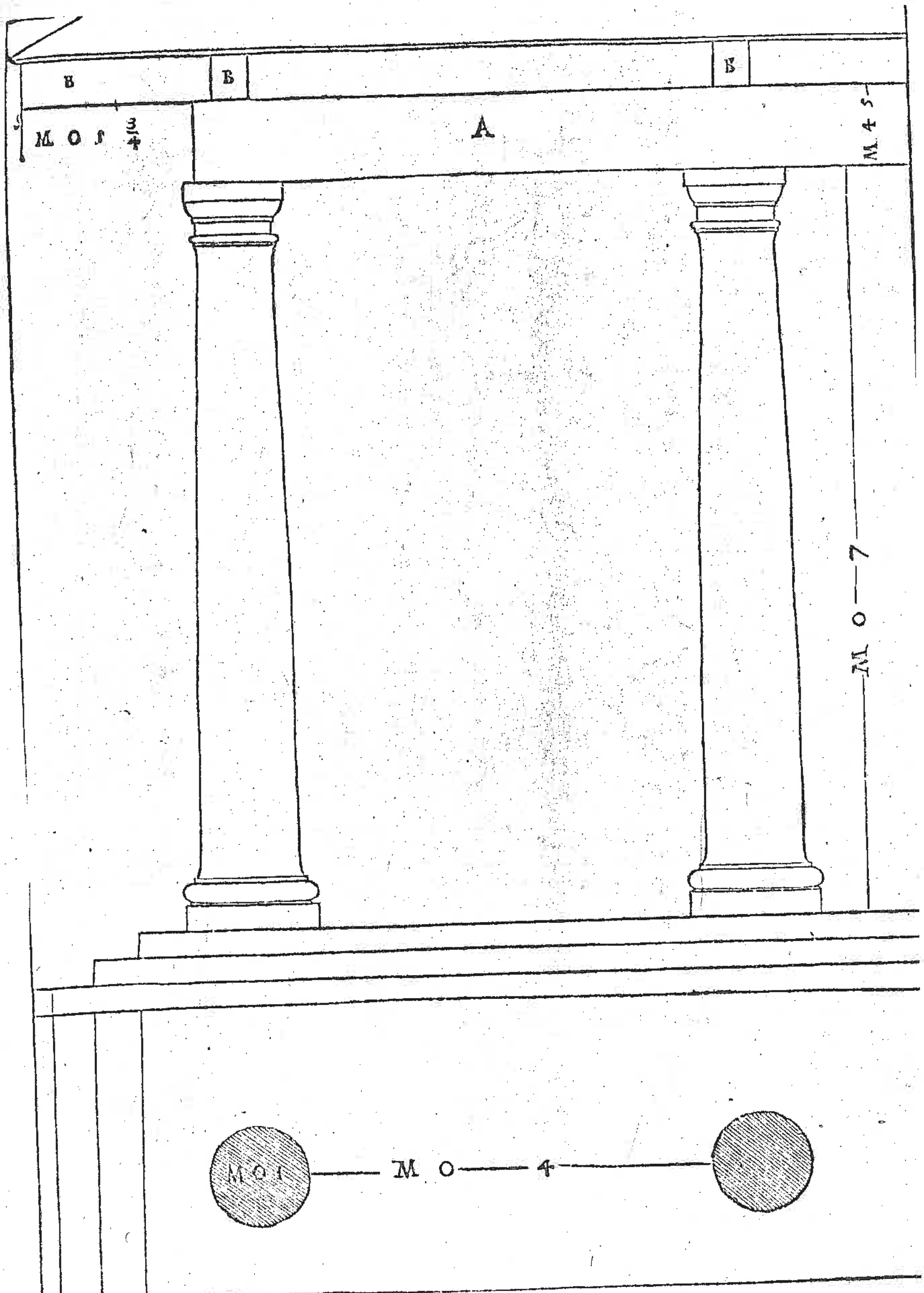


Fig. 12. Proporciones de la columna Toscana según Palladio.

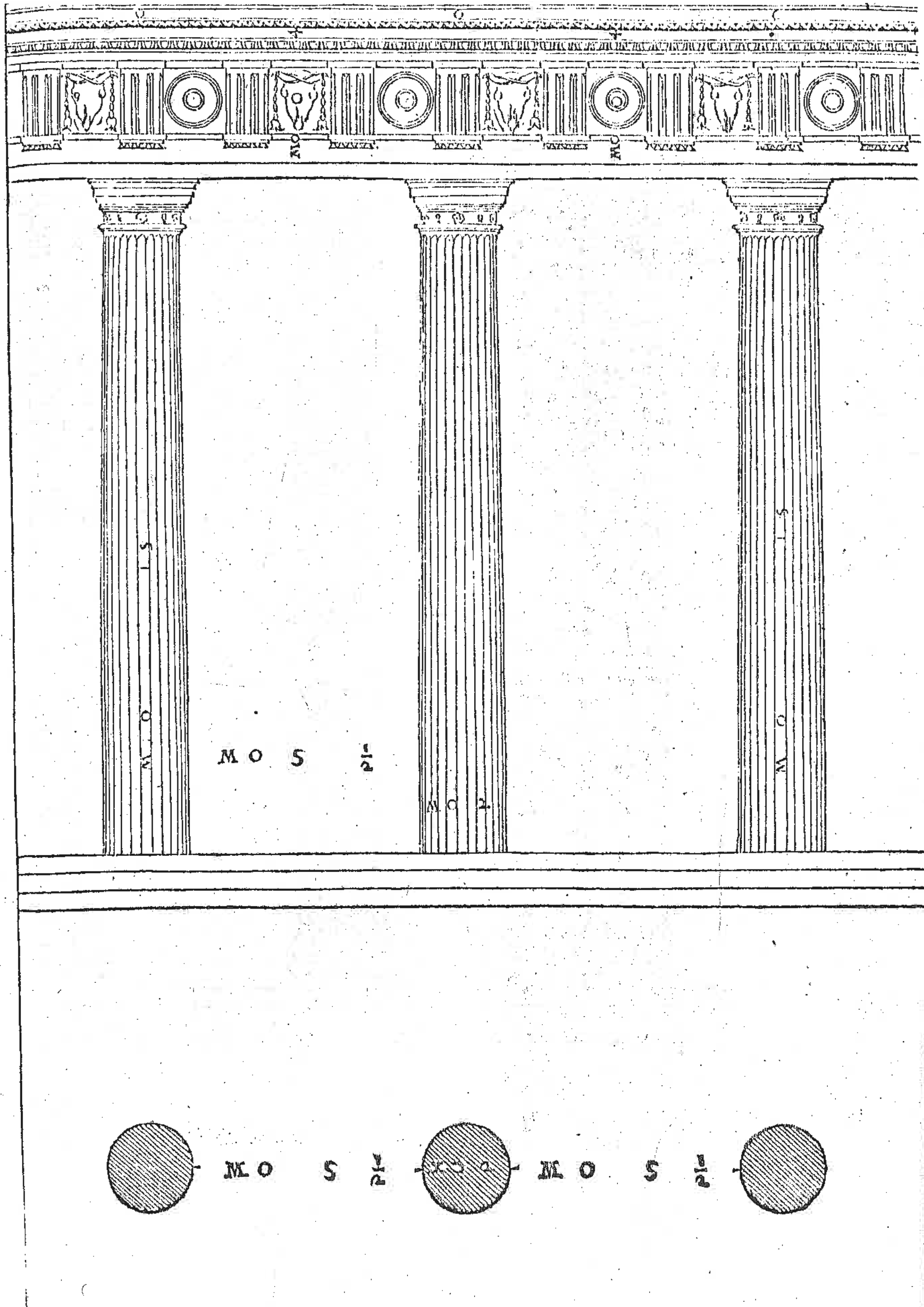


Fig. 13. Proporciones de la columna Dórica según Palladio.

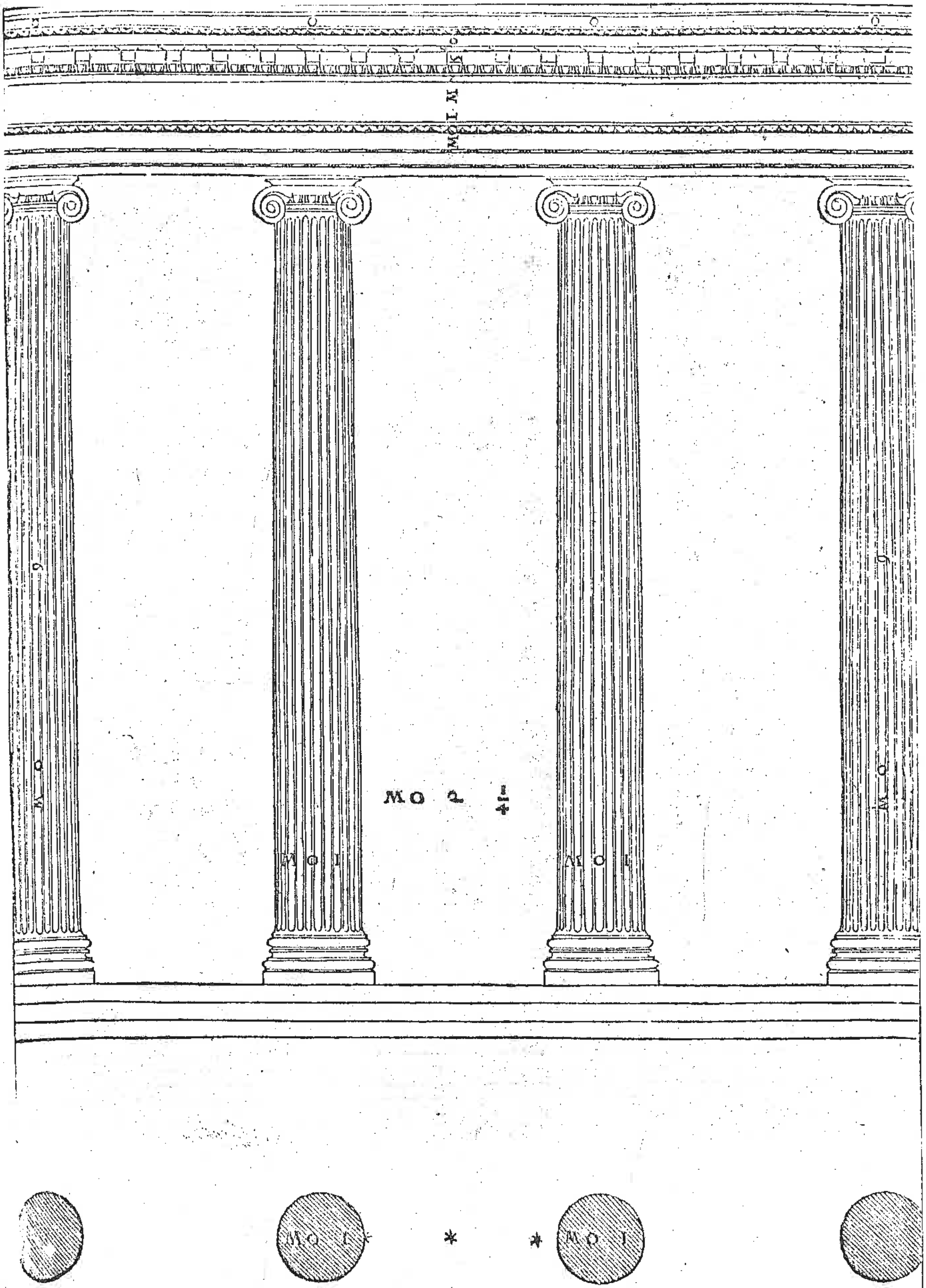


Fig. 14. Proporciones de la columna Jónica según Palladio.

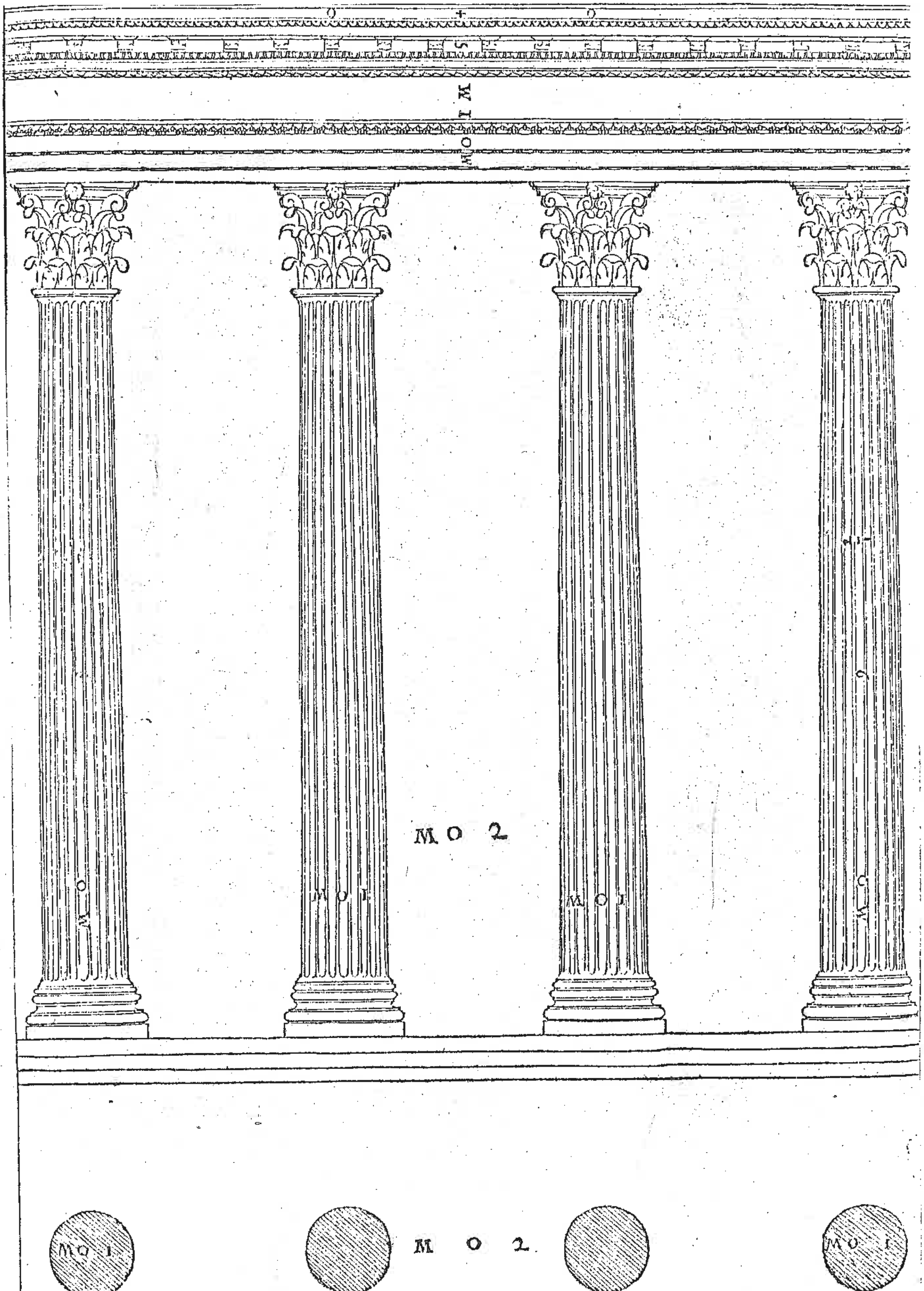


Fig. 15. Proporciones de la columna Corintia según Palladio.

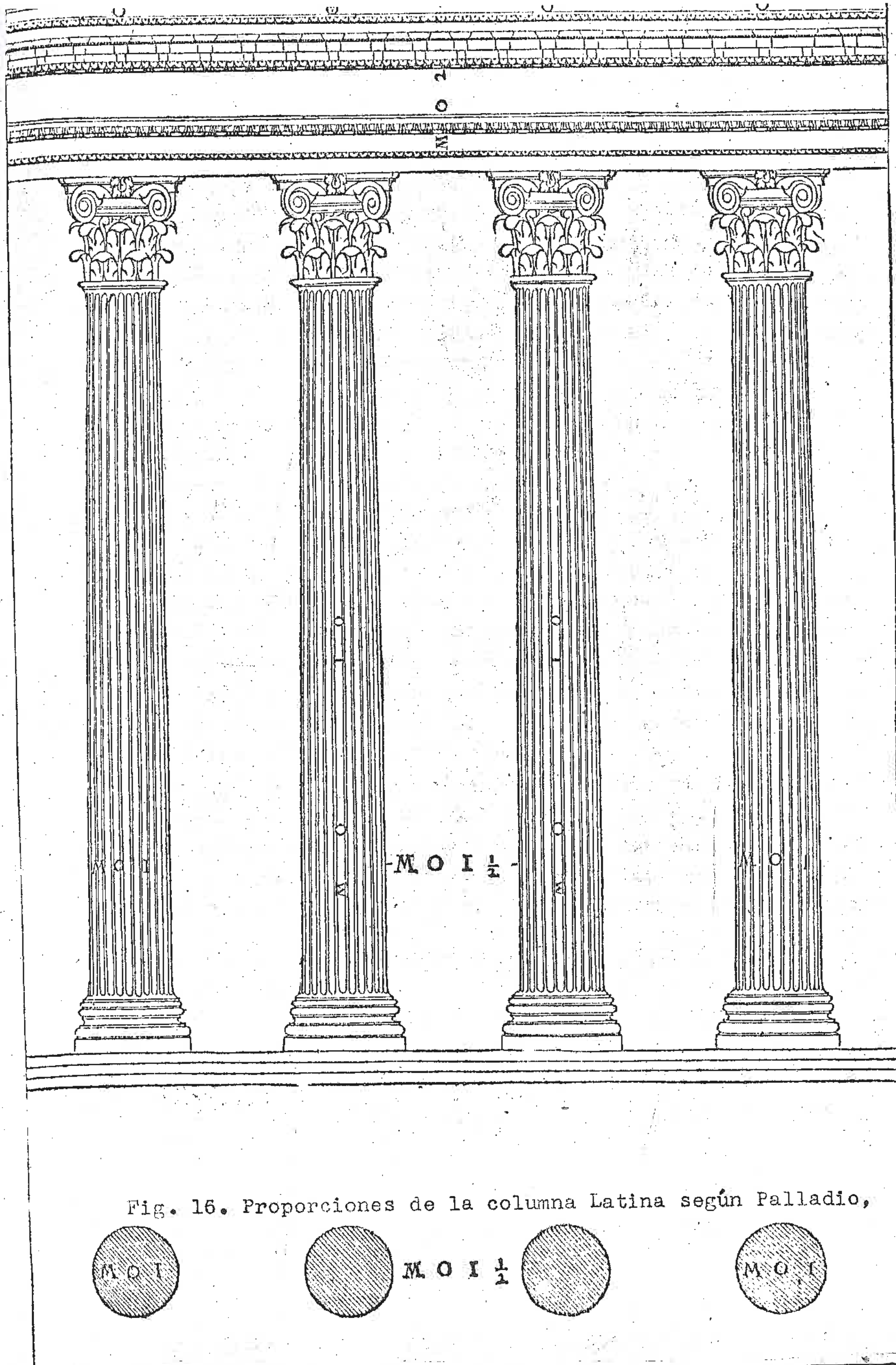


Fig. 16. Proporciones de la columna Latina según Palladio,

A comienzos del siglo XX se destacan en la arquitectura francesa Perret y Tony Ganier. El primero, por mostrar las nuevas posibilidades compositivas que se presentan al adoptar la estructura de cemento armado (23); y Garmier al adoptar un aspecto realista tendiente a resolver las cuestiones sociales mediante la organización urbanista del terreno. Su "cité industrielle" (1901) es la "tentativa de adecuar las estructuras urbanistas a las exigencias de una sociedad dirigida mediante la industrialización a una redistribución de los bienes y a una uniformidad de las exigencias" (24).

En 1908 Le Corbusier conoce a Garnier y tiene la oportunidad de observar sus principios: Separación de las zonas urbanas en previsión de expansiones futuras, independencia de las vías para peatones y vehículos, sistematización del espacio verde, definición del tipo de intervención de la administración pública en la dirección del nuevo organismo urbanístico (que la administración tenga libre disposición del suelo y que sea ella misma quien proporcione el agua, el pan, la carne, la leche y las medicinas, dadas las múltiples precauciones que requieren estos productos) (25).

Junto con las influencias que Le Corbusier recibe de Perret (utilizacióm del cemento armado) y de Garnier (utilización de la atquitectura para solucionar problemas sociales), también percibe y registra las tensiones relativas al ansia del momento y afirma en el capítulo titulado "El hombre y la naturaleza" de su libro MANERA DE PENSAR LA URBANISTICA, que para formular respuestas a los problemas planteados por nuestro tiempo hay un único criterio aceptable, que reconducirá todos los problemas a sus verdaderos fundamentos: este criterio es el Hombre (26).

---

(23) Cresti, Carlo; Le Corbusier. (Barcelona: Publicaciones reunidas 1971), pág. 7.

(24) Op. Cit., pág. 8.

(25) Ibid.

(26) Le Corbusier, Manera de pensar la urbanística. (Barcelona: Editorial Visión 1959), pág. 56.

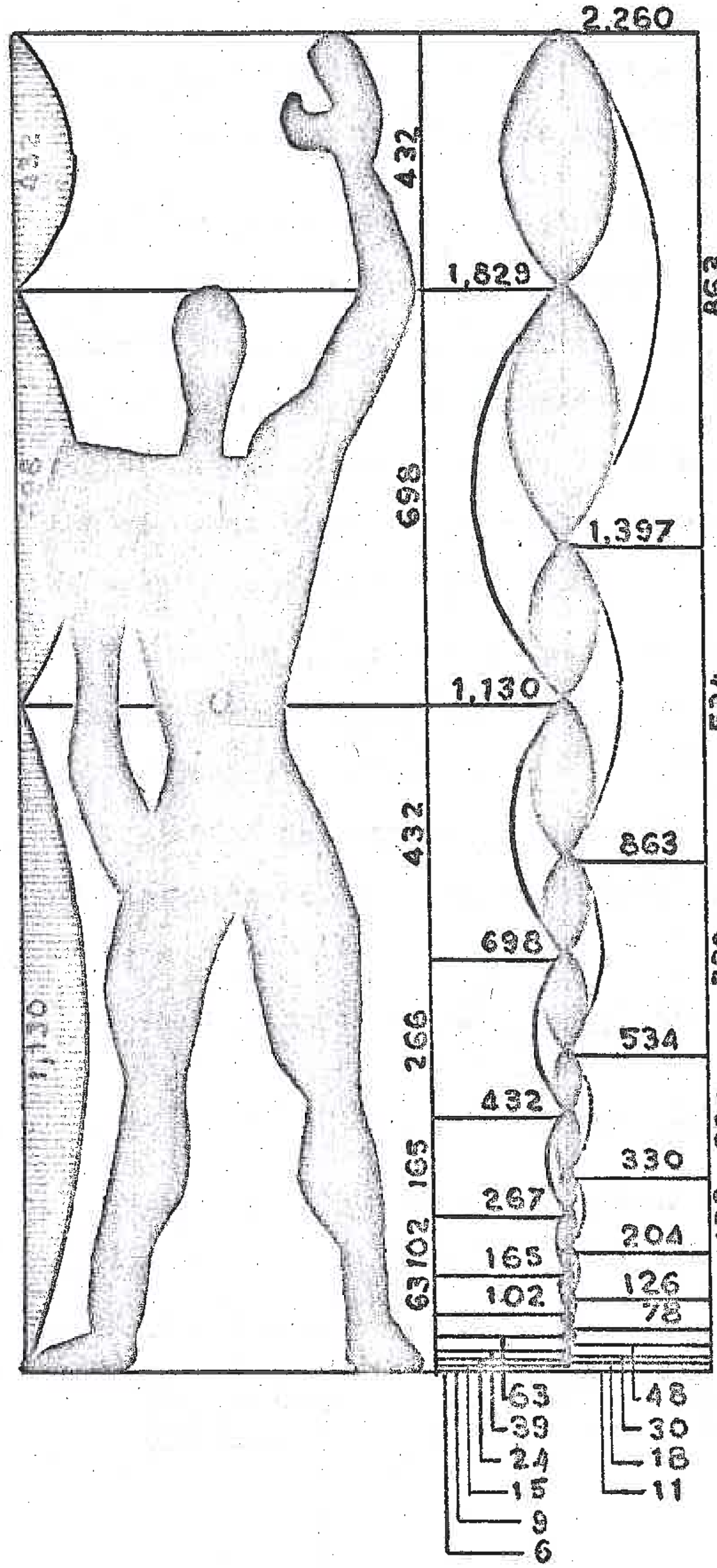
Le Corbusier presenta entonces el Modulor en 1945, resultado de muchos años de estudio sobre un tratado proporcional establecido por la medida humana. Los principios del Modulor son los mismos de la sección áurea, pero replanteados según un nuevo concepto: En la sección áurea el hombre no es más que un individuo excepcional autónomo y perfecto, que representa en su estática geometría el centro del universo, y su simetría y proporción se convierten en unidad y garantía de referencia armónica (27). Para Le Corbusier el hombre no es la imitación del hombre "ad circulum" o" ad quadratum" (figura pág.), aislado en el microcosmos geométrico de una figura plana sino que es por el contrario el hombre asociado y dinámico, es decir, la unidad relacionada conscientemente a la totalidad y al ambiente. Es este contacto con la totalidad del sistema el que crea la necesidad de una racionalización de las relaciones; es decir, quiere una "verdad dimensional" que tenga en cuenta el uso que el hombre haga de las cosas (28). En este punto podemos citar una frase del crítico arquitectónico Europeo Bruno Zevi:"La arquitectura es un sistema de gentes, no un sistema de cosas" (29). Es decir: el hombre no debe adaptarse a la arquitectura, sino que la arquitectura debe estar hecha para el hombre, debe involucrar las actitudes humanas sin sofocarlas.

El modulor no es ya una medida abstracta de la belleza absoluta e invariable, sino que es una medida comparada a un hombre determinado que cumple determinadas funciones fundamentales en su medio ambiente; es decir, una proyección del hombre y su actividad, articulada en términos numéricos relacionados, que quieren conservar la expansión de su organismo psíquico y físico en el mundo ya no externo, <u>sino hecho propio y humanizado</u>; y también no es ya exclusivamente estético pues

(27) Wittkover, pág. 16.

(28) Cresti, pág. 32.

(29) Zevi, Bruno. <u>Saber ver la arquitectura</u>. (Buenos Aires: Editorial Poseidon, 1951), pág. 205.



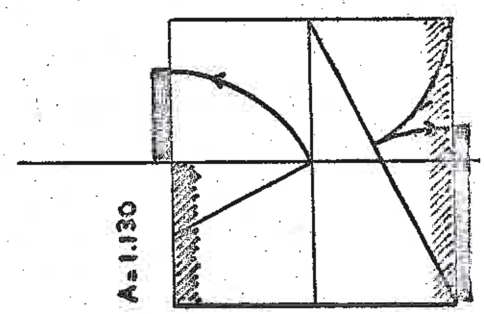


Fig. 17. El Modulor.

incluye un diagrama de componentes mas ámplios y diversos que unifica las actividades en la relación hombre-naturaleza.

Le Corbusier define este sistema de medidas de la siguiente manera: "El modulor es un aparato de medida fundado en la estatura humana y en la matemática. Un hombre con el brazo levantado da a los puntos determinantes de la ocupación del espacio, el pié el plexo solar, la cabeza, la punta de los dedos con el brazo levantado; tres intervalos que definen una serie de secciones áureas" (30).

Tomando un hombre con estatura de 1,828 (seis pies) obtenemos los siguientes datos:

Altura hasta el ombligo:	1.130 mm.
Distancia del ombligo a la cabeza:	698 mm.
Distancia de la cabeza a la punta de los dedos:	432 mm.

Podemos comprobar que: $\frac{1.130}{698} = 1,6189...$

$$\frac{698}{432} = 1,6157...$$

La medida 1.130 inicia una escala llamada "escala roja": 6, 9, 15, 24, 39, 63, 102, 165, 267, 432, 698, 1.130, 1.828, que

(30) Le Corbusier. The Modulor: A harmonious measure to hte human scale universally applicable to Architecture and Mechanics. (Cambridge: University Press, 1954), pág. 8.

es una serie de Fibonacci formada en órden descendente y ascendente a partir de los tres términos consecutivos 432, 698 y 1.130 (son consecutivos en una serie de Fibonacci pues 432 + 698 = 1.130). Esta escala tiene por último término la altura total del hombre, y podríamos extenderla en orden descendente hasta obtener una serie característica de Fibonacci (con los dos términos iniciales iguales) : 3, 3, 6, 9, 15, 24,... .

A partir de la medida 226= 2 x 113 origina la llamada "escala azul":

11, 18, 30, 48, 78, 126, 204, 330, 534, 863, 1.397, 2. 260 en la cual cada término, con pequeñas aproximaciones es el doble del correspondiente en la escala roja.

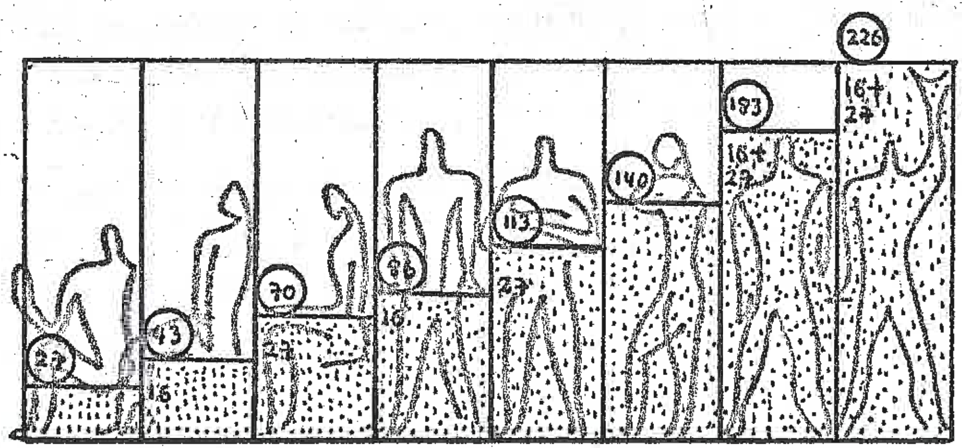


Fig. 18.

Además de las propiedades puramente proporcionales de las escalas se deben considerar los valores de sus propias dimensiones. Recordemos que el modulor no es solamente un sistema de proporción es decir un medio para asegurar la repetición de formas armoniosas. Es así mismo un sistema de dimensiones concebido para normalizar las dimensiones de los elementos (producidos en serie) de que se sirve el hombre (sillas, mesas, etc.), de hecho el hombre sentado corresponde a 43 cms., apoyado en una mesa a 70 cms., en una barandilla a 113 cms. (fig. 18.). Es esta la razón por la cual Le Corbusier afirma que el modulor es más apropiado para diseñar muebles y otros aditamentos de la figura humana, que una escala deriva de una unidad arbitraria como el metro (31).

Otro aspecto interesante del modulor es la forma en que trata de salvar la separación existente entre el mundo del metro y los centímetros y el de los pies y las pulgadas. La escala fué creada originalmente en base a la altura promedio del hombre francés: 1,75 m. sinembargo, las medidas de la serie originada en esta medida resultaban extraordinariamente toscas cuando se traducían al sistema inglés de pies y pulgadas. Pero Le Corbusier descubrió para sorpresa suya, que tomando la estatura promedio del hombre inglés: 6 pies (1,8288 mts.), las graduaciones del nuevo modulor se convertían en cifras redondas de pies y puldadas.

Las escalas "a la inglesa" quedaron como sigue:

Roja: 4", 6,5", 10,5", 17", 27,5", 44,5", 72"...

Azul: 8", 13", 21", 34", 55", 89", 144", 233"...

Y similarmente, las dimensiones equivalentes en metros y centímetros resultaron ser números redondos.

La sección Aurea.

Dividir una recta conforme a la sección áurea consiste en dividir su longitud en dos partes desiguales de tal modo que la razón entre la menor y la mayor sea igual a la razón entre la mayor y la longitud total: Es decir, los tres puntos A,B y C dispuestos en la recta L (fig. 19) están en sección áurea si AB/BC= BC/AC.

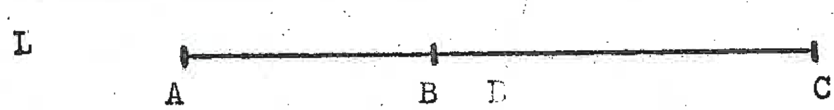


Fig. 19.

(31) Op. Cit. Pág. 43.

Veamos dos formas de construír geométricamente esta proporción:

1. Dado el segmento AB (fig. 20) se traza un segmento BD de longitud AB/2, que pase por B y que sea perpendicular a AB. Se une A con D y se halla el punto E tal que DE=DB. Con A como centro se describe el arco de círculo de radio AE. El punto, que notaremos C, en donde el arco corta el segmento AB es el que divide el segmento total en sección áurea.

AC/ CB = AB/ AC

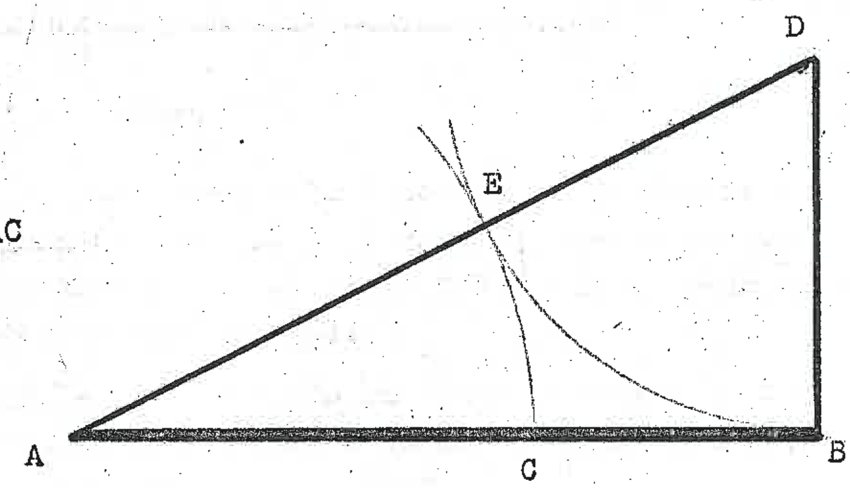


Fig. 20

2. Cuando se tiene un segmento y se desea prolongarlo de tal manera que el segmento original y la nueva prolongación estén en sección áurea se utiliza la siguiente construcción: Dado el segmento AC (fig. 21) se dibuja el cuadrado ACFG que tiene por lado AC. Se traza la recta OF que une F con O, el punto medio de AC (AO= OC). Con O como centro se describe el arco de círculo de radio OF. El punto, que llamaremos B, en donde el arco corta la prolongación de AC es el que cumple la relación de la sección áurea.

Este sistema de proporción ha recibido diferentes nombres a través de los tiempos, en la edad media se le conocía como "proporción divina"; Kepler, quien la considera como una de las dos joyas de la geometría (siendo la otra el teorema de

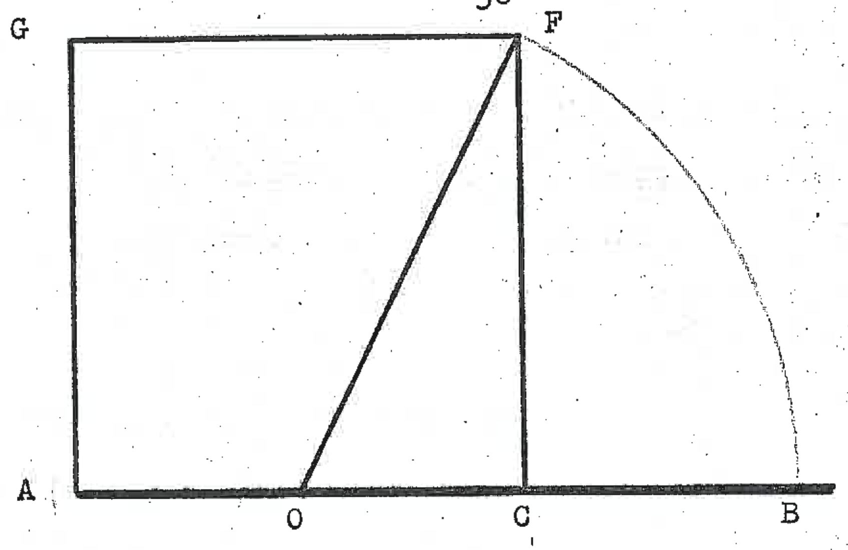
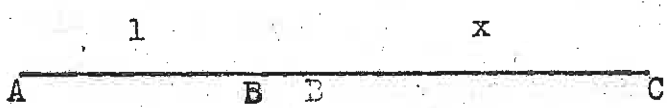


Fig. 21

Pitágoras sobre el cuadrado de la hipotenusa) la llamaba "divina sección"; Leonardo Da Vinci le daba el nombre de "sección áurea" y finalmente, en el siglo XIX se le conoció como la "ley de las proporciones" (32).

Del nombre que le dió Leonardo Da Vinci proviene la denominación de número de oro o número áureo al valor numérico que vamos a determinar ahora.



Supongamos que el segmento AC, dividido según la sección áurea, la longitud de AB es igual a uno. Tenemos que hallar

---

(32) En Septiembre de 1951, con ocasión de la trienal de Milán, se instaló el congreso de la "divina proporción", con asistencia de sabios, matemáticos, estetas y arquitectos.

la longitud de BC = x de tal manera que se cumpla la relación

BC/AB= AC/BC. Como AB=1 y BC= x se tiene que:

x/1=x-1/x, lo cual implica: x = x-1

$$x -x-1= 0$$

$$x= \frac{1- 5}{2}$$

obtenemos las siguientes dos raíces:

$$x= \frac{1+ 5}{2} = 1,61803398875...$$

$$x= \frac{1- 5}{2} = - 0,61803398875...$$

La primera raíz de la ecuación es la que se conoce como el número áureo y se nota con la letra griega (fi).

Veamos algunas de las propiedades de este asombroso número irracional:

Fibonacci, matemático del medioevo italiano, obtuvo la serie: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765... al resolver un problema sobre la descendencia de los conejos.

(Fibonacci observó que los conejos se reproducen tan rápidamente que es común encontrar tíos y sobrinos de la misma edad; es decir, los progenitores tienen una segunda descendencia contemporánea de la de sus primeros descendientes, teniendo estos una segunda descendencia contemporánea igualmente a la de sus propios descendientes. Pero los progenitores van desapareciendo por muerte natural.

Se trataba de considerar un caso muy sencillo: aquél en que los conejos nacidos en cierta época eran los descendientes directos de los de la generación precedente y anteprecedente. Supuso además, para simplificar, que el número de los hijos era igual al de los padres, es decir, al número de conejos en las dos generaciones anteriores. También supuso que en la primera generación había un sólo conejo.

Como en la primera generación había un solo conejo, en la segunda generación debía haber un número de conejos igual al número de conejos en las dos anteriores; 0+1=1. En la siguiente generación debía haber tantos conejos como en la primera y segunda generaciones (sumadas); 1+1=2. Luego seguiría: 1+2 =3, 2+3=5, 3+5=8, etc) (33).

Esta serie,conocida hoy como serie de Fibonacci, podemos construírla fácilmente puesto que cada término se obtiene sumando los dos anteriores. No es necesario comenzar con 1, basta con que los dos primeros términos sean iguales para obtener una serie de Fibonacci adecuada para nuestro análisis de las propiedades del número áureo.

Fibonacci, una vez que obtuvo la serie, comenzó a hacer los cocientes entre términos consecutivos:

1/1=1
2/1=2
3/2=1,5
5/3=1,666....
8/5=1,6
13/8=1,625
21/13=1,6153846...
34/21=1,6190476...
55/34=1,6176470
89/55=1,6181818...

144/89=1,6179775...
233/144=1,6180555...
377/233=1,6180257...
610/377=1,6180371...
987/610=1,6180327...
1597/987=1,618034...
2584/1597=1,6180338...
4181/2584=1,6180340...
6765/4181=1,6180339...
....

Y concluyó que la relación de un número con respecto al precedente tiende a un valor límite, que llamaremos K. Si por Un

---

(33) Warusfel, André. *Los números y sus misterios*. (Barcelona: Ediciones Martínez Roca, 1968), pág.93.

notamos el n-simo término de la serie, tenemos: (34).

$U_{n-1} = K \times U_{n-2}$

$U_n = K \times U_{n-1}$, entonces

$U_n = K \times U_{n-2} = K \times U_{n-1}$

Pero $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ implica que (35)

$K \times U_{n-2} = K \times U_{n-2} + U_{n-2}$

dividiendo por U_{n-2} a ambos lados de la igualdad:

$K = K + 1$, o sea: $K - K - 1 = 0$

$$K = 1{,}61803399\ldots = \quad (36)$$

Partimos de un problema sobre la descendencia de los conejos y llegamos al número áureo. Veamos otras relaciones entre la sección áurea y la naturaleza, relaciones que probablemente indujeron a los artistas a pensar que esta proporción es la divina proporción.

El alemán Zeysing (XIX), luego de haber hecho medidas sobre miles de cuerpos humanos, declara (Aestetische Forschungen, 1855) que esta ley de proporciones se cumple a las proporciones del hombre (37). Sir Theodor Cook (The Curves of Life) consideró la idea de Zeysing, y comparando diferentes

---

(34) Op. Cit., pág. 94.

(35) Puesto que cada término de la serie se obtiene sumando los dos anteriores.

(36) Esta demostración era muy aceptable en aquélla época; pero debemos notar que todas las razones entre las parejas de números consecutivos son diferentes. Fibonacci pasa por alto la diferencia entre las razones, y dice que como tienden a un valor límite K, se puede suponer que la razón del cociente entre dos números consecutivos de la serie es K.

(37) Ghyka, Matila C. Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes. (Buenos Aires: Editorial Poserdón, 1953), pág. 36.

estatuas antiguas y los cuadros de los maestros del Renacimiento con las conclusiones de Zeysing construyó un canon ideal para el cuerpo femenino. (Fig. 22).

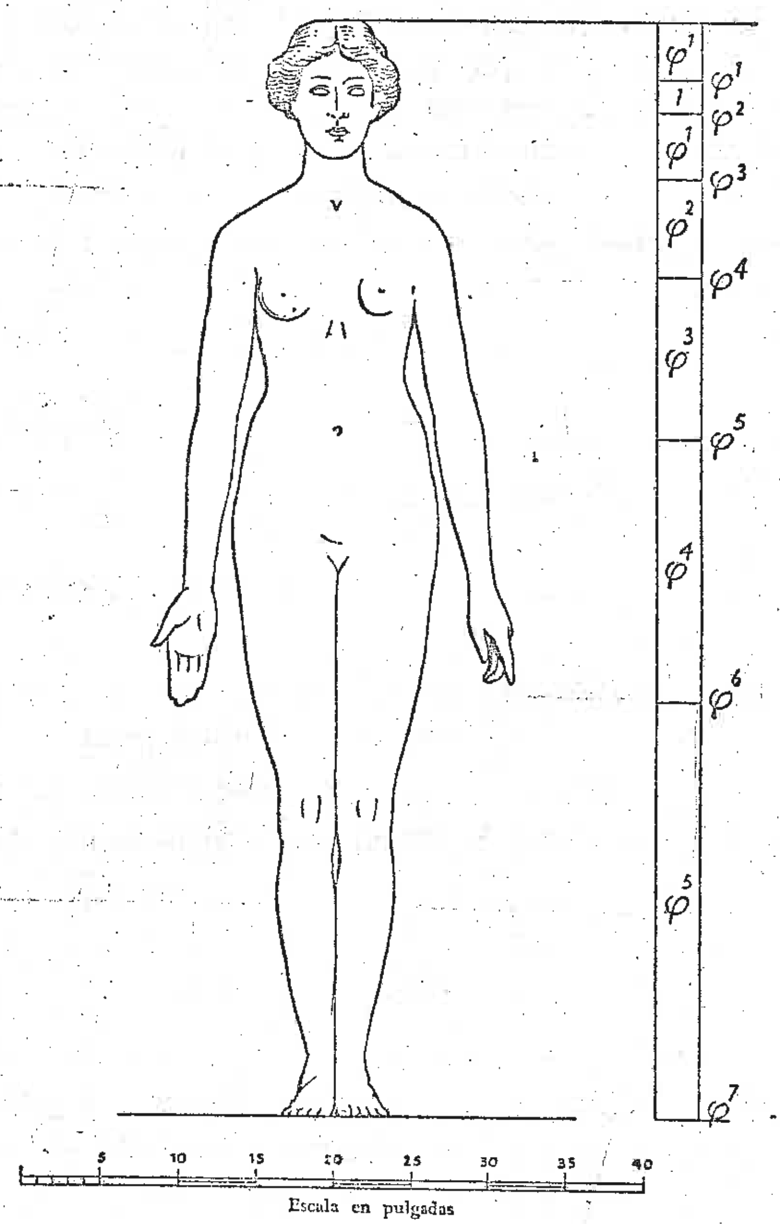


Fig. 22.

En botánica también se encuentra la sección áurea. Un ejemplo son los girasoles y margaritas. Las semillas de estas plantas están formadas por dos conjuntos de espirales que giran en direcciones opuestas. Si contamos el número de espirales en cada conjunto obtendremos dos números consecutivos de la serie de Fibonacci: en las flores degeneradas hay 13 y 21 espirales; en las normales hay 21 y 34, 34 y 55, 89 y 144 y excepcionalmente 144 y 233. Se ha comprobado que el tipo normal, de gran rendimiento y recomendado para el cultivo tiene 89 y 144 espirales en cada conjunto (38).

Veamos ahora algunas de las propiedades matemáticas de esta ley de proporciones:

Teníamos que $= \frac{1 + 5}{2} = 1{,}618\ldots$

Es fácil comprobar que $1/ \quad = \frac{5-1}{2} = 0{,}618\ldots$

y que $= \frac{5 + 3}{2} = 2{,}618\ldots$

lo cual indica que $-1 = 1/$

$= + 1$

Podemos generalizar este resultado y demostrar por inducción que $=$ para todo entero n:

Ya vimos que se cumple para $n = 1$, $1 + 1/$

Supongamos que se cumple para $n = K$ ($=$ $+$) y demostrémolo para $n = K + 1$:

Entonces para todo entero n.

Si formamos la sucesión 1, , , , ,... , , ... Comprobamos que además de ser una progresión geométrica (cada término se obtiene multiplicando el anterior por la constante), es una sucesión en la cual cada término tam-

---

(38) Op. Cit., pág. 43.

bién puede obtenerse sumando los dos anteriores. A este tipo de sucesión se le ha dado el nombre de "serie aditiva de dos tiempos" (39).

También se ha encontrado que existe una estrecha relación entre la sección áurea y las secciones cónicas (parábola hipérbola, elipse). (40).

En una parábola cualquiera en la cual F designa el foco, V el vértice y G un punto de la parábola que se encuentra en la perpendicular a la recta VF, trazada por F; sabemos que la longitud de GF es dos veces la de VF (GF=2VF). Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

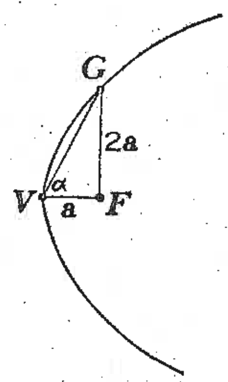


Fig. 23.

GV = 5a = a 5 (donde VF = a),

y entonces (Fig. 23):

$$\cot \quad + \quad \csc \quad = 1/2 + \quad 5/2 = \frac{1 + \quad 5}{2} = \quad$$, o lo que es lo

mismo: $$= \frac{1 + \cos}{\text{sen}}$$

También tenemos: $$\text{sen} \quad = 2/ \quad 5 = \frac{2(1 + \quad 5)}{5(1 + \quad 5)}$$ (multiplicando y dividiendo por 1 + 5)

$$= 2\,\frac{\frac{1 + \quad 5}{2}}{\frac{5 + \quad 5}{2}} = \frac{2 \quad \frac{1 + \quad 5}{2}}{\frac{1 + \quad 5}{2} + 2} = \frac{2}{\quad + 2}$$

(39) Op. Cit., pág. 46.

(40) Verno, C. Ralph. "The golden section and conicsections" Mathematics teacher. Vol 67, 4 (Abril 1974), pág. 361.

Y también: $\cos\ = \frac{a}{a\ \ 5}$

$= 1/\ \ 5 = 1/2.2/\ \ 5$

$= 1/2.$ sen

$= 1/2\ \frac{2}{-\ \ 2}$

$= \frac{\ }{+\ 2}$

En la figura 24 tenemos una rama de la hipérbola $x\ \ / a\ -$ $y\ / b\ \ = 1$ con el rectángulo de dimensiones 2a y 2b y cuyas diagonales ($y = \pm\ bx/\ a$) son las asíntotas de la hipérbola. El vértice de esta rama de la hipérbola se encuentra en (a,0). También se muestra la parábola con vértice en el origen y que pasa por los vértices del rectángulo de tal modo que interceptada la hipérbola en los puntos P y Q. Como las coordenadas en el punto M son (a,b) se puede verificar que la ecuación de la parábola es $y = \frac{b}{a}\ x$.

Resolviendo estas dos ecuaciones, tenemos por sustitución,

$\frac{x}{a} - \frac{b\ x}{ab} = 1$ o $\frac{x}{a} - \frac{x}{a} = 1$ o

$x\ - ax\ - a = 0$. Resolviéndola obtenemos:

$x = \frac{a \pm\ 5a}{2} = a\ \frac{1 \pm\ 5}{2}$

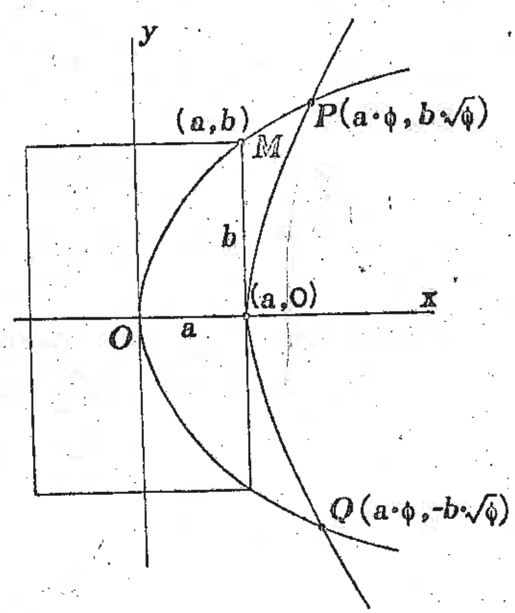


Fig. 24.

Usando la raiz positiva a y sustituyéndola en la ecuación de la parábola, obtenemos $y = \frac{b}{a}.a.$, o sea: $y = b$ . .

Los puntos de intersección de estas dos cónicas son (a. , ± b). El punto (a.0) no es necesariamente el punto focal de la parábola; cuando lo es, b = 2a y los puntos de intersección son (a. , ± 2a).

Cuando la parábola de la figura 24 (y = b x/a) intercepta la elipse $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (Fig. 25), encontramos que las coordenadas de los puntos de intersección, R y S, son:

$$\frac{x}{a} + \frac{b\ x}{ab} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{x}{a} = 1, \quad x + ax - a = 0,$$

$$x = \frac{-a \pm 5a}{2} = a\ \frac{-1 \pm 5}{2}$$

La raiz positiva es a $\frac{-1 + 5}{2}$, , que es a.$\underline{1}$, como $\underline{1}$ =

$$\frac{1}{\frac{1+5}{2}} = \frac{2}{1+5} = \frac{2}{1+5}\ \frac{1-5}{1-5} = \frac{2(1-5)}{-4}$$

$$= \frac{1-5}{-2} = \frac{-1+5}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola, obtenemos:

$$y = \frac{b}{a} \cdot \underline{a} = \underline{b}, \quad y = \pm\ \underline{b}$$

Entonces las coordenadas de los puntos R y S, las intersecciones de la parábola con la elipse, son $\underline{a}$, ± $\underline{b}$.

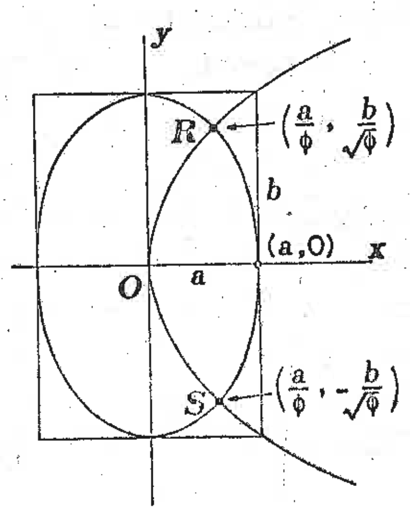


Fig. 25.

En la figura 26 tenemos la misma elipse, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, y la parábola que la intercepta que tiene el vértice en (0,0) y pasa por los puntos ($\pm$a,b). Como (a,b) está en la parábola se verifica que la ecuación de ésta es $x = \frac{a}{b} \cdot y$. La solución de estas dos ecuaciones muestra que los puntos de intercección, K y L, de la parábola y la elipse son $\pm$ <u>a</u>, <u>b</u> .

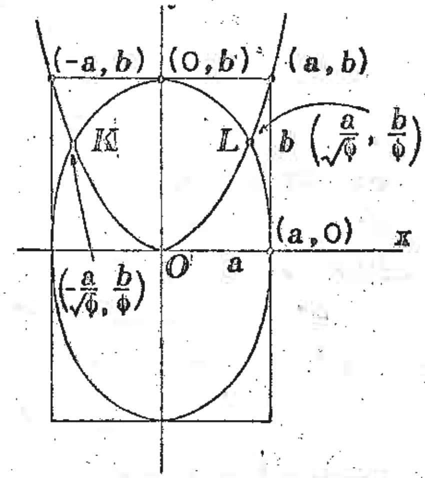


Fig. 26

<u>La sección áurea en el arte.</u>

Si tenemos un rectángulo como el que vemos en la figura 27. a. y queremos dividirlo en dos sectores que guarden entre sí las mejores relaciones armónicas.

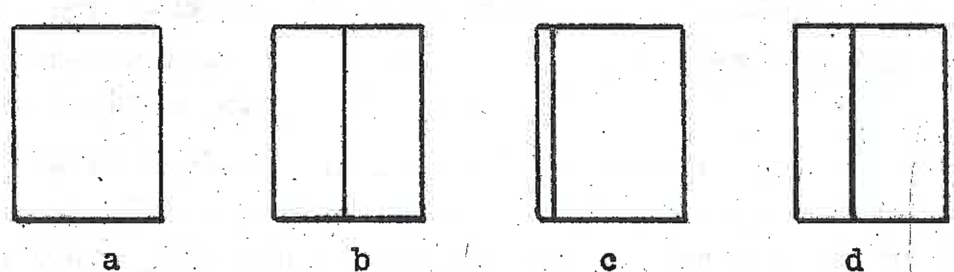


Fig. 27.

Si lo partimos como se ha hecho en la figura b, por la mitad, el resultado es frío y estático. El sistema de dividir en dos pardes iguales, nos da como resultado dos áreas sin movimiento.

Dividamos el rectángulo en dos partes desiguales, del modo que podemos ver en la figura c. Ahora la diferencia entre un sector y otro es tan acusada que falla el factor unidad.

Cual es la solución? Fijémonos en la división efectuada en el rectángulo de la figura d. En esta ocasión, entre las dos zonas en que se <u>haya dividido el rectángulo</u>, existe unidad dentro de la variedad. La variedad está salvada al no ser iguales las dos partes. La unidad no se resiente puesto que la diferencia de tamaño entre uno y otro sector es la justa para que no exista desequilibrio. (41). Este rectángulo d está dividido conforme a la sección áurea.

El hombre, tal vez intuitivamente, se dió cuenta de que un rectángulo, un cuadrado u otra forma geométrica dividida según la sección áurea, un rectángulo cuyos lados están en sección áurea o cualquier otra "materialización" de la sección áurea eran una buena solución al problema de la armonía y por lo tanto, de la belleza (42).

Zeysing estuvo midiendo cartas de baraja, marcos de ventanas, puertas, cuadros, formatos de carta, etc., y encontró que en la gran mayoría de estos rectángulos, los lados estaban en proporción áurea.

Los griegos han sido los que mayor uso de la sección áurea han hecho en sus construcciones. Zeysing fué el primero en observar la sección áurea como módulo en la fachada del Partenón (fig. 28) (43).

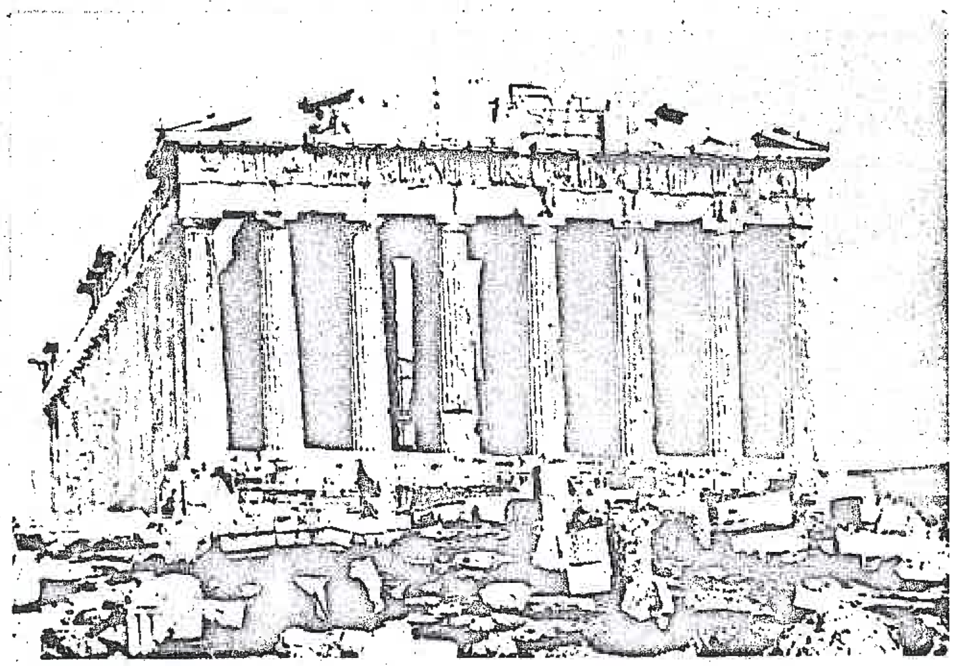
En el Partenón de Atenas se comprueba que la relación entre la altura de las columnas (BC) y la altura del frontón, el friso y el arquitrabe (AB) es la misma sección áurea. Igualmente sucede con la altura del frontón (AD) y la del friso con el arquitrabe (DB).

---

(41) Antonino, José. La composición en el dibujo y la pintura. (Barcelona: Edicciones Ceac, 1969), pág. 27.

(42) En una encuesta realizada entre 150 estudiantes de la Universidad Javeriana, en la que se representaban tres rectángulos con las divisiones que aparecen en la figura 10, se encontró que el 46% de los entrevistados preferían el rectángulo dividido según la sección áurea (d); el 29% preferían el dividido mediante una línea horizontal trazada por el centro (b) y el 25% escogieron la división en la cual la diferencia entre un sector y otro era muy grande (c).

(43) Ghyka, pág. 39.



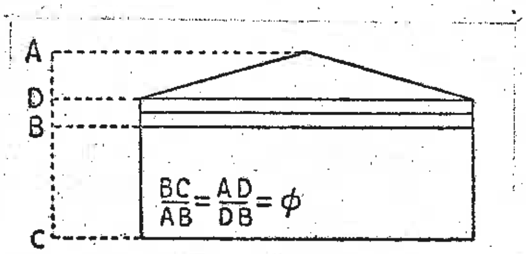


Fig. 28.

También se comprueba que los lados del rectángulo circunscrito a la fachada están según la sección áurea. Es decir, el rectángulo EFGH es un rectángulo áureo (ver pág.   ).

El famoso cuadro "Los Pastores de Arcadia" (fig. 29), de Nicolás Poussin, está construído enteramente según los principios de la sección áurea; pueden descubrirse los horizontales y las verticales que dividen los lados en proporción áurea, los ajustes sucesivos de los retángulos que llevan la atención del espectador hacia la inscripción. Rafael, entre tantos otros pintores renacentistas, hizo múltiples empleos de la sección áurea ("San Miguel abatiendo el demonio", "La Bella Jardinera").

Fig. 29. Los Pastores de Arcadia de Nicolás Poussin.

Las únicas obras impresionistas en las que se ha encontrado la sección áurea han sido las del pintor puntillista francés, Georges Seurat. En la figura 30 aparece la pintura titulada "El Desfile", en la cual pueden encontrarse, entre otras, las siguientes áureas: AE/GE=AF/EF=GH/HI= .

Un análisis similar puede hacerse de la mayoría de las últimas pinturas de Piet Mondrian, muchas de las cuales fueron pintadas para ser colgadas por las esquinas. En la figura 31 aparece su obra titulada "Broadway Boogie Woogie" y el análisis de las secciones áureas que se encuentran en esta pintura.

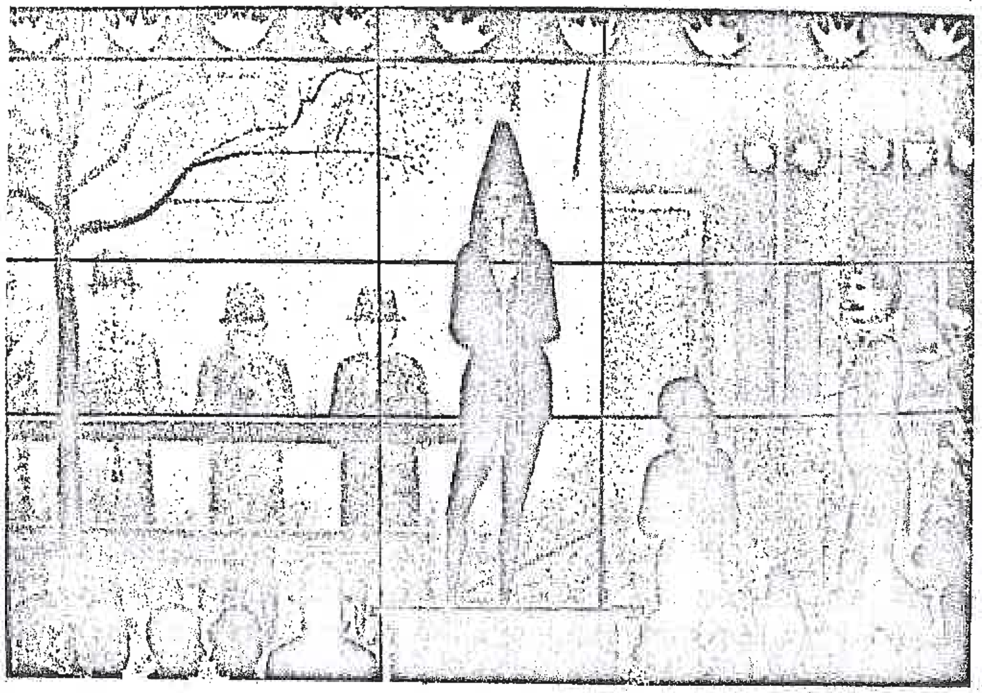


Fig. 30. Georges Seurat, "El Desfile"., 1807.

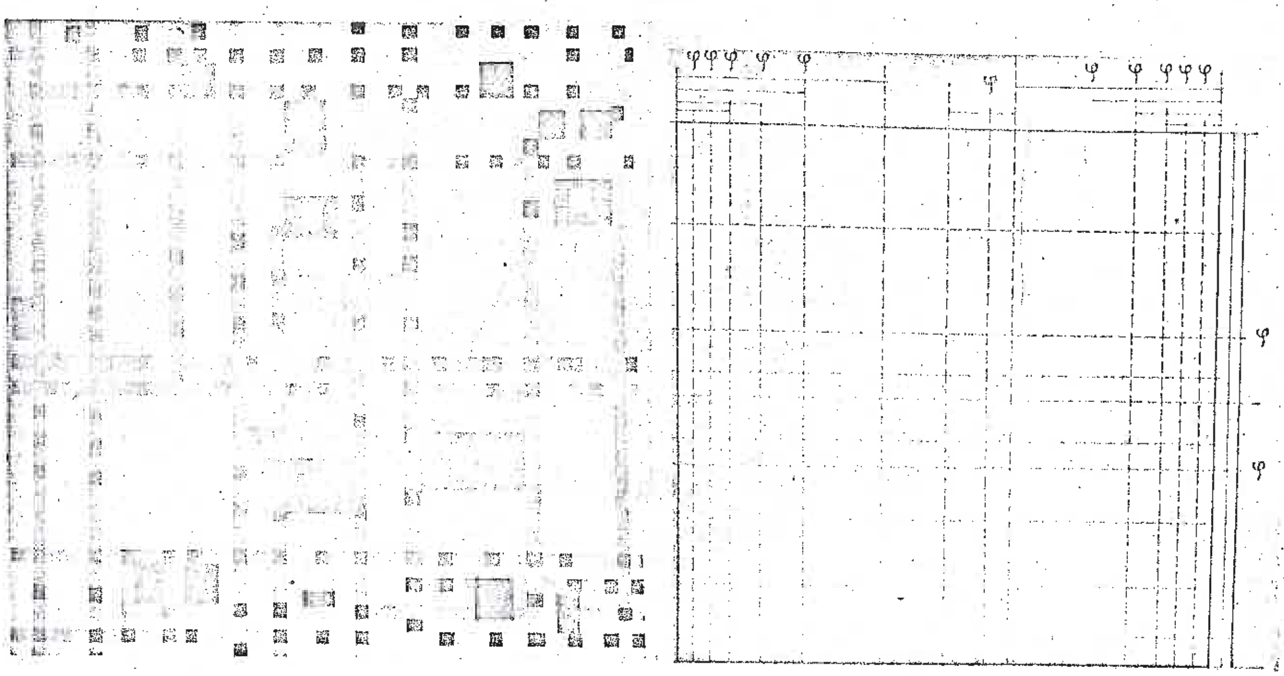


Fig. 31. Piet Mondrian, "Broadway Boogie Woogie,1942.

Salvador Dalí utiliza la sección áurea en la composición de todas sus pinturas; y al revelar a los futuros artistas los secretos de su creación dice: "No coloques objetos en una playa desierta en la menera tradicional. Te aséguro que cometerás un grave error de primitivismo. Debes proceder según mi punto de vista: Te revelaré ahora el secreto de un compás por medio del cual podrás hallar tantas secciones de oro como desees, sin tener que recurrir a una horrible operación geométrica para la cual a menudo necesitas un inmenso compás, requiriendo que vayas más allá del área de tu cuadro, y esto es con frecuencia tan inconveniente que tu pereza te aconsejará, al cabo, seguir adelante sin una proporción semejante" (44). I a continuación Dalí dá las instrucciones para la construcción de un compás de olivo que se articula proporcionalmente dando la sección áurea de cualquier medida (Fig.32).

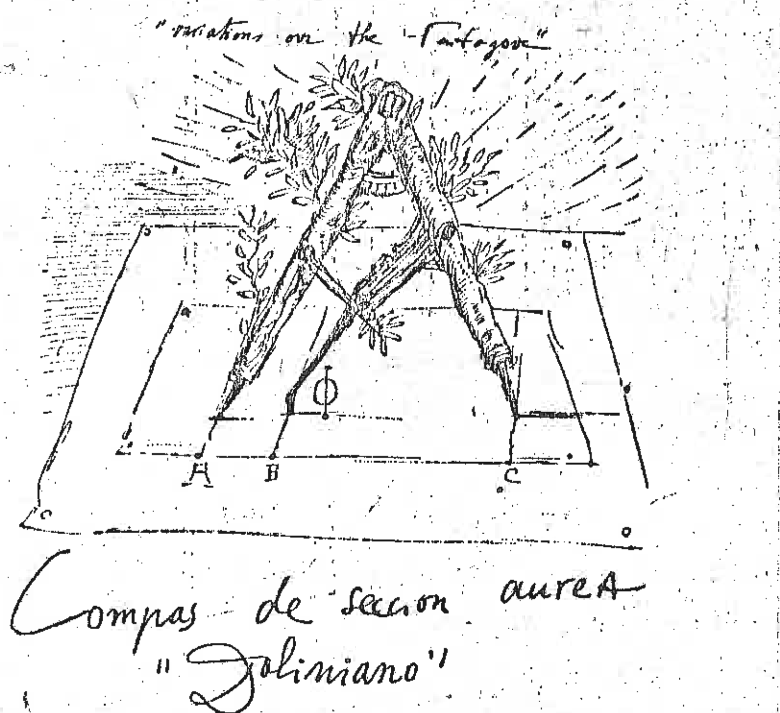


Fig. 32. Compás de sección áurea.

(44) Dalí, Salvador. Cincuenta secretos mágicos para pintar. (Barcelona: Luis de Caralt, 1951), pág. 174.

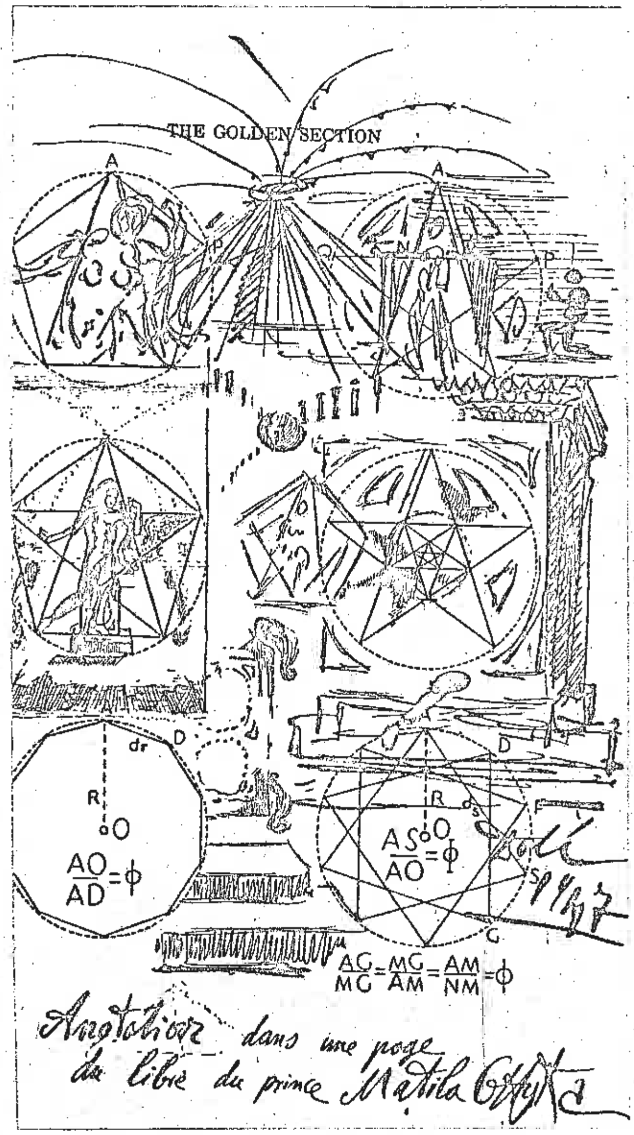
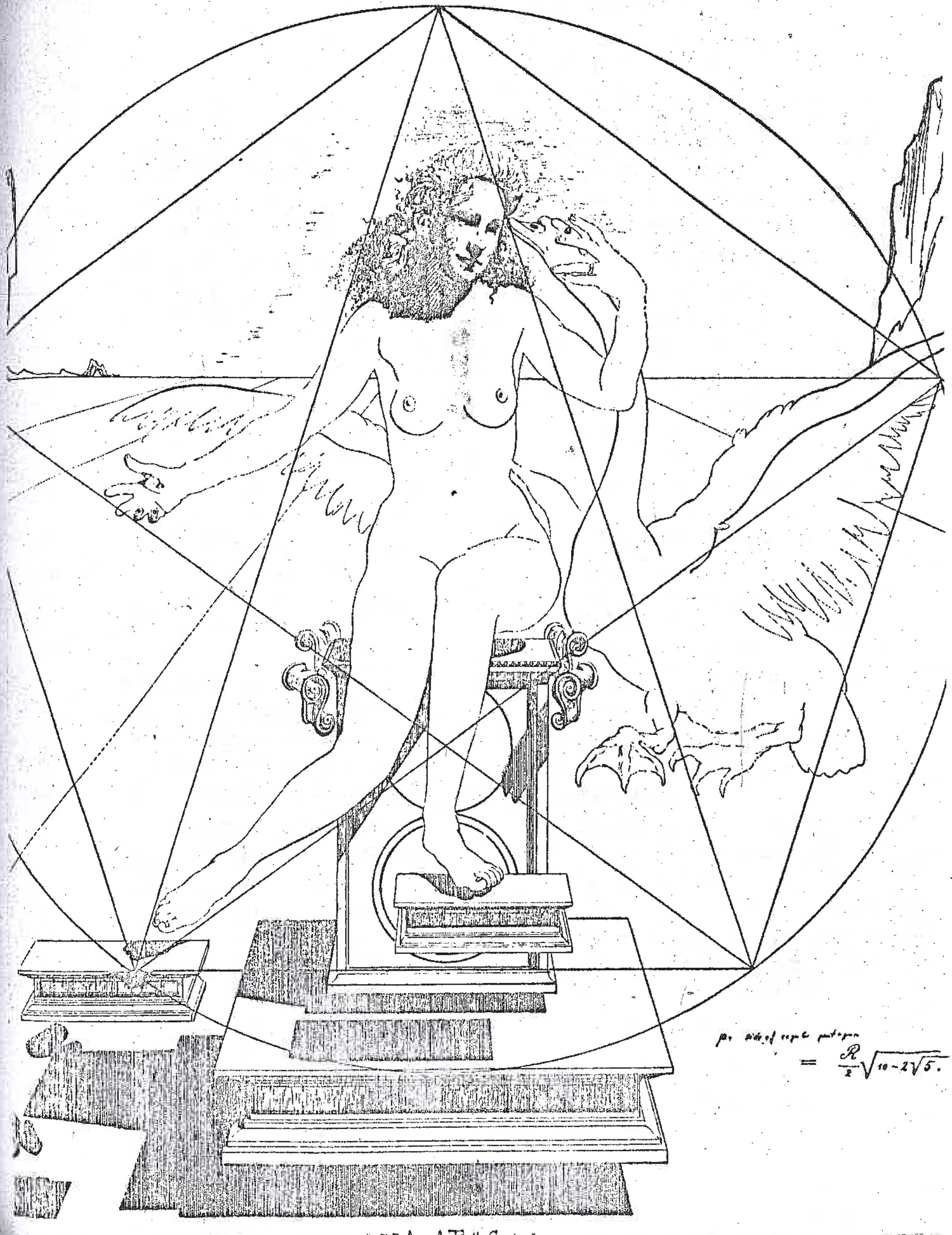


Fig. 33. Anotaciones de Dalí acerca de la sección áurea.

En la figura 34 aparece el esquema de composición de la pintura de Dalí titulada "Leda Atómica" y que está estructurada por medio de un pentágono en el cual están inscritas las diversas figuras. Las proporciones dadas por este polígono no son secciones áureas: AD/AB =AB/AC=


the side of regular pentagon
$= \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$

RECTANGULOS DINAMICOS

Son rectángulos dinámicos aquéllos rectángulos cuyos lados están en proporción 1: n, con n entero mayor de 1.

Estos rectángulos han sido utilizados para generar sistemas de proporción pues, al igual que la naturaleza, se reproducen así mismos; son capaces de crear un ritmo . Es decir los antiguos se dieron cuenta que la naturaleza es un enorme ritmo, periodicidad desarrollándose en el tiempo; los días siguen a los días, las estaciones a las estaciones; el sol, la luna y los demás astros aparecen a su turno,; las plantas engendran plantas, las generaciones humanas nacen a imagen de las anteriores; y aún en el mismo cuerpo humano, el ritmo del corazón y de la respiración mantienen la vida.

A fin de poner su obra al unísono con la naturaleza, los artistas, y principalmente los arquitectos, buscaron la manera de incluír ese ritmo en sus obras, transpasándola del tiempo al espacio. (45).

La forma era el único medio de realizar tal tarea; y como en una construcción la forma está ligada a lineas verticales y horizontales que se interceptan para formar rectángulos; el problema se redujo a encontrar una clase de rectángulos capaces de reproducirse a sí mismos, de crear un ritmo. Y fué así como después de muchos intentos probablemente, encontraron que los rectángulos cuyos lados están en relación 1: n tienen esta propiedad de reproducirse a sí mismos.

Tomemos, por ejemplo, el rectángulo cuyos lados están en relación 1: 2. Para construírlo se "baja" la diagonal AG del cuadrado ABGH sobre el lado AH hasta que coincida con este. Al prolongar BG hasta que intercepte la perpendicular a AD trazada por el punta D, obtenemos un rectángulo cuyos lados están en proporción 1: 2; y que para abreviar llamaremos rectángulo 2. (Fig. 35.)

---

(45) Jouven, Georges. Rythme et architecture; les tracés harmoniques. (París: Editions Vincent, 1951), págs. 5-8.

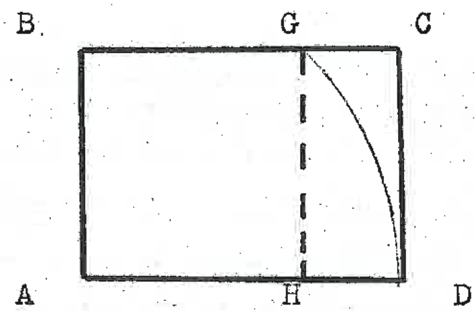


Fig. 35

Si dividimos el rectángulo 2 en dos partes iguales por medio del segmento de recta EF (E es el punto medio de BC y F es el punto medio de AD) obtenemos los rectángulos BEFA y EC DF que también son rectángulos 2. (Fig. 36).

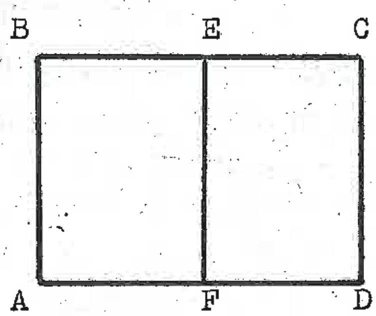


Fig. 36.

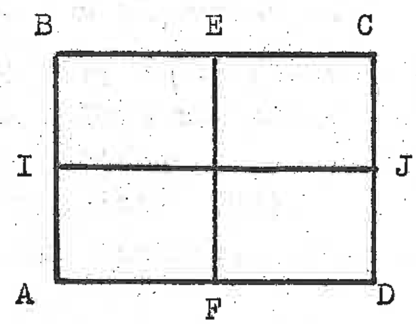


Fig. 37.

Similarmente podemos continuar dividiendo los rectángulos 2 en otros mas pequeños que conservan la misma relación. (Fig. 37). Y esta propiedad de esta clase de rectángulos la asociaron los antiguos con el ritmo de la naturaleza.

Anotemos las definiciones de algunos términos que nos servirán para seguir nuestro estudio de los rectángulos dinámicos. (46). Se dice que un rectángulo es de <u>tema n</u> si la relación entre sus lados es una expresión que contiene el término n y números enteros cualesquiera en el numerador y el denominador en el denominador. Por ejemplo, los rectángulos $\frac{3+1}{2}$, $\frac{3}{2}$, 3-4 son de tema 3.

---

(46) Chyka, pág.

Se llama <u>descomposición armónica</u> de un rectángulo de tema n a la división de éste rectángulo, por medio de rectas paralelas a los lados, en cuadrados y en rectángulos de tema n.

Se llama <u>gnomon</u> de una figura geométrica a otra figura tal, que agregada a la primera no altera la forma. El rectángulo 2 es por lo tanto su propio gnomon. (47).

Los principales representantes de esta clase de rectángulos son: (48).

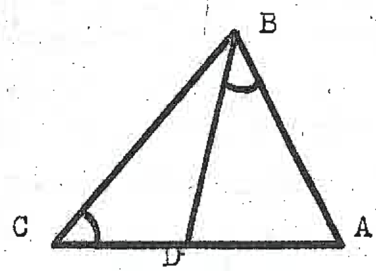
El rectángulo 2 (emparentado con el cuadrado)
El rectángulo 3 (emparentado con el triángulo equilatero)
El rectángulo 4 = 2 (llamado cuadrado doble)
El rectángulo 5 (emparentado con el rectángulo)

Evidentemente los rectángulos 6, 7, etc. también crean ritmos, pero como en estos casos la diferencia entre los lados es tan grande, se obtienen unos rectángulos demasiado "aplastados" que no son agradables a la vista. (49).

En la figura 38 se muestra como se construyen todos estos rectángulos a partir del cuadrado.

---

(47) Hero de Alejandría anota que en cualquier triángulo una parte es siempre el gnomon de la otra. Por ejemplo, en el triángulo ABC, dibujemos BD, haciendo el ángulo CBD igual al ángulo en A. Entonces la parte BCD es un triángulo semejante a todo el triángulo ABC,yABD es un gnomon de BCD. (Dal, Salvador. <u>Cincuenta secretos mágicos para pintar</u>. Barcelona: Luis de Carait, 1951, pág. 184.



(48) Jouven, pág. 15.

(49) Hambidge, Jay. <u>The Elements of Dynamic Symmetry</u>. (New York: Dover Publications, 1967), pág. 19.

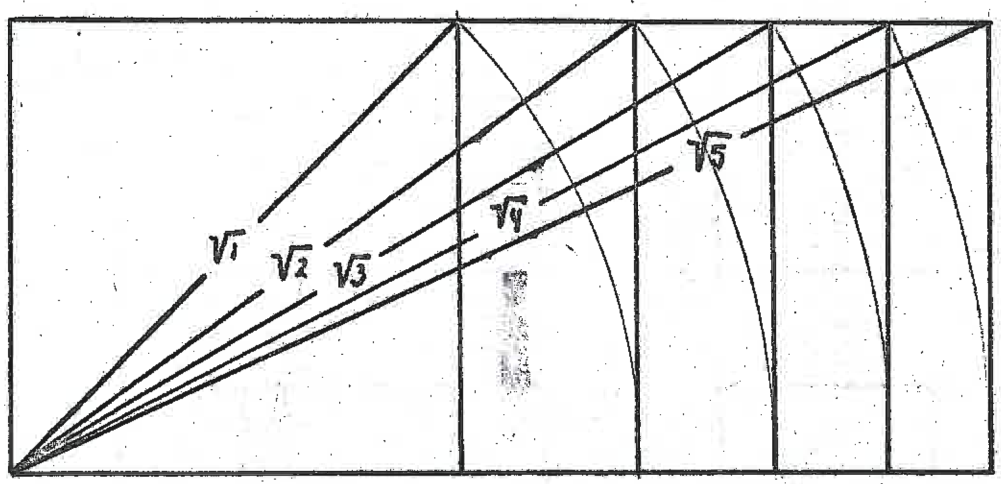


Fig. 38.

Tema 2.

Los principales componentes de este tema son los rectángulos 2 y 2/2, el cuadrado y el doble cuadrado.

El lado mayor y el menor de un rectángulo 2 son inconmensurables, no mensurables uno por el otro. Sinembargo son conmensurables en cuanto a las áreas de los cuadrados construídos sobre ellos; el área del cuadrado construído sobre el lado mayor es el doble del a del cuadrado construído sobre el lado menor.

En la figura 39 se muestran algunas de las descomposiciones armónicas del rectángulo 2.

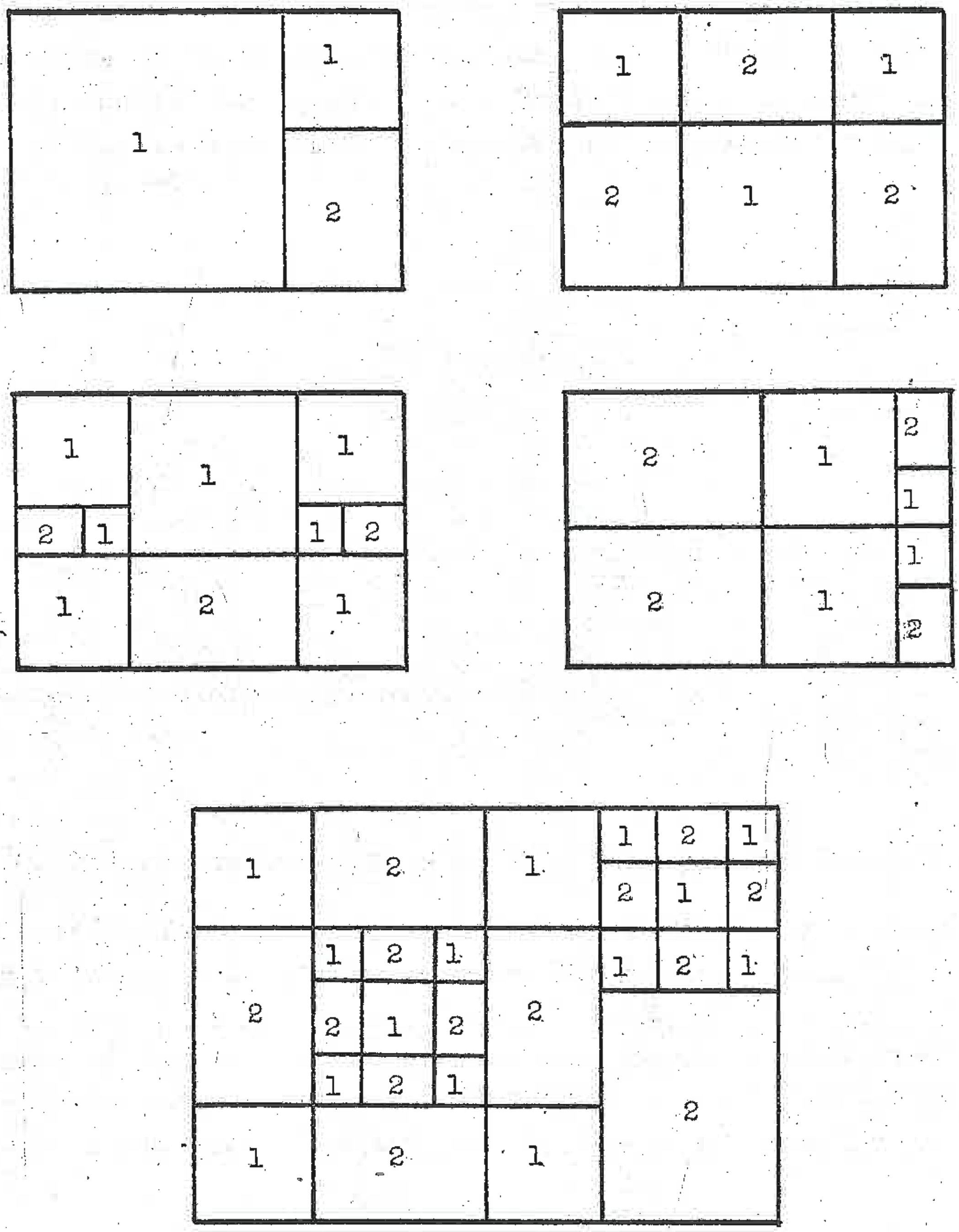


Fig. 39. Descomposiciones armónicas del rectángulo 2.

Vitruvio aconsejaba el uso del rectángulo 2 para los detalles de los órdenes y la forma del atrio de una casa (3). Pero en el siglo IV que por primera vez encontramos, en Italia, el tema 2 en la antigua Basílica de San Pedro de Roma (según el manuscrito de Alfarano). En la iglesia de Santa Praxedes en Roma se utilizará un poco mas tarde una proporción análoga (Fig. 40).

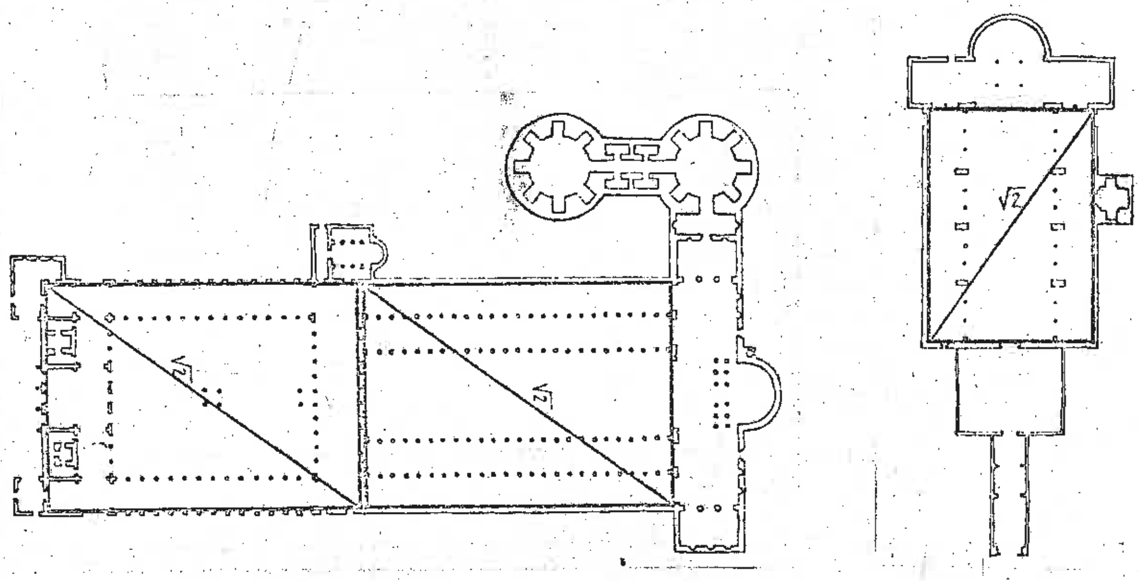


Fig. 40. Trazado de los planos de San Pedro y Santa Praxade s.

El rectángulo 2 es el que generalmente dió la extructura de los monumentos de la arquitectura Bizantina y Románica.

Es durante el Renacimiento francés que se utiliza mas ampliamente el rectángulo 2 en la estructuración de las fachadas de las construcciones. A continuación se analizan las proporciones de la puerta de entrada del "patio del caballo blanco" del castillo de Fontainebleau. (Fig. 41).

GK/GH=DH/CH=AF/BF=BG/BF= 2

Y además los rectángulos
son rectángulos 2.

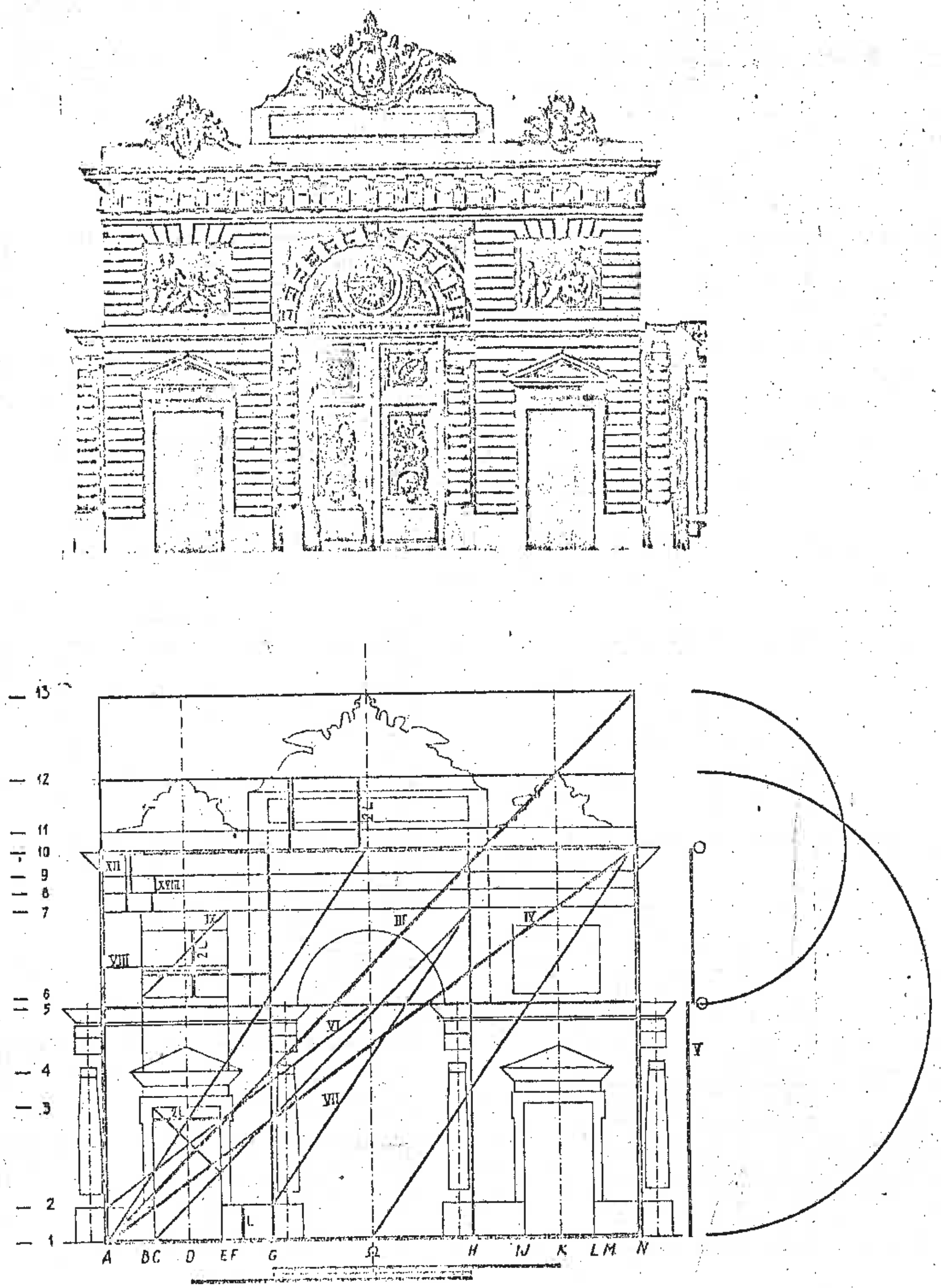


Fig. 41. Puerta de entrada al "Patio del caballo blanco" y su trazado proporcional.

El tema $4 = 2$

Este tema está compuesto por el cuadrado y el doble cuadrado.

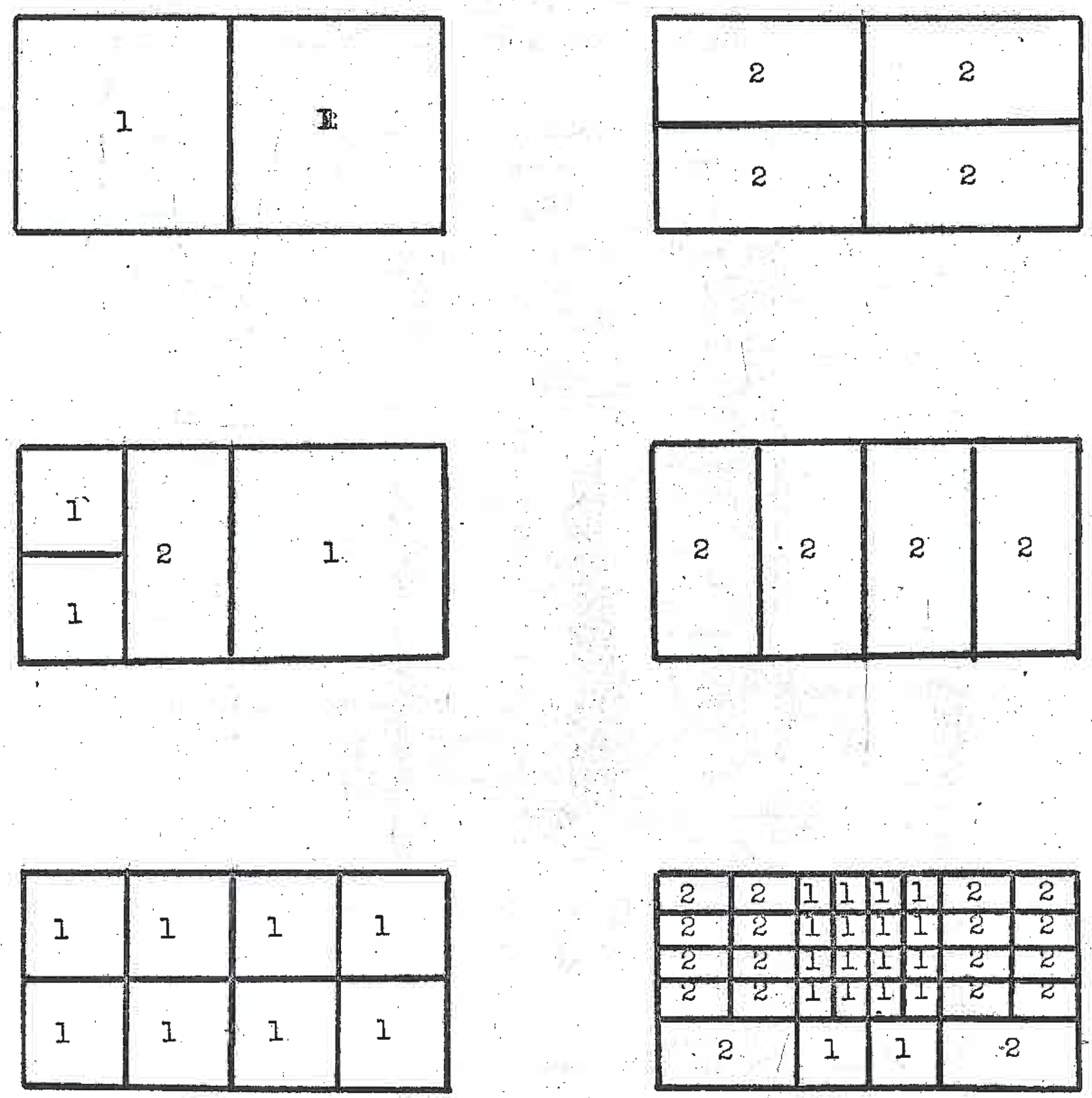


Fig. 42. Descomposiciones armónicas del doble cuadrado.

Los primeros ejemplos que conocemos de la utilización de este rectángulo son la cámara del rey en la gran pirámide de Keops y el plano del templo de Poseidón en la legendaria Atlántida.

Es durante la Edad Media cuando el cuadrado doble aparece con más frecuencia en el planeamiento de basílicas y monasterios del norte de Africa, de Siria y de Grecia (fig. 2) El refrectorio del monasterio Gran Lavra del monta Athos está estructurado por medio de dos cuadrados dobles que se cruzan (fig. 43.)

En la figura 44 muestran las plantas de algunas de las construcciones renacentistas que fueron tratadas por medio del cuadrado doble.

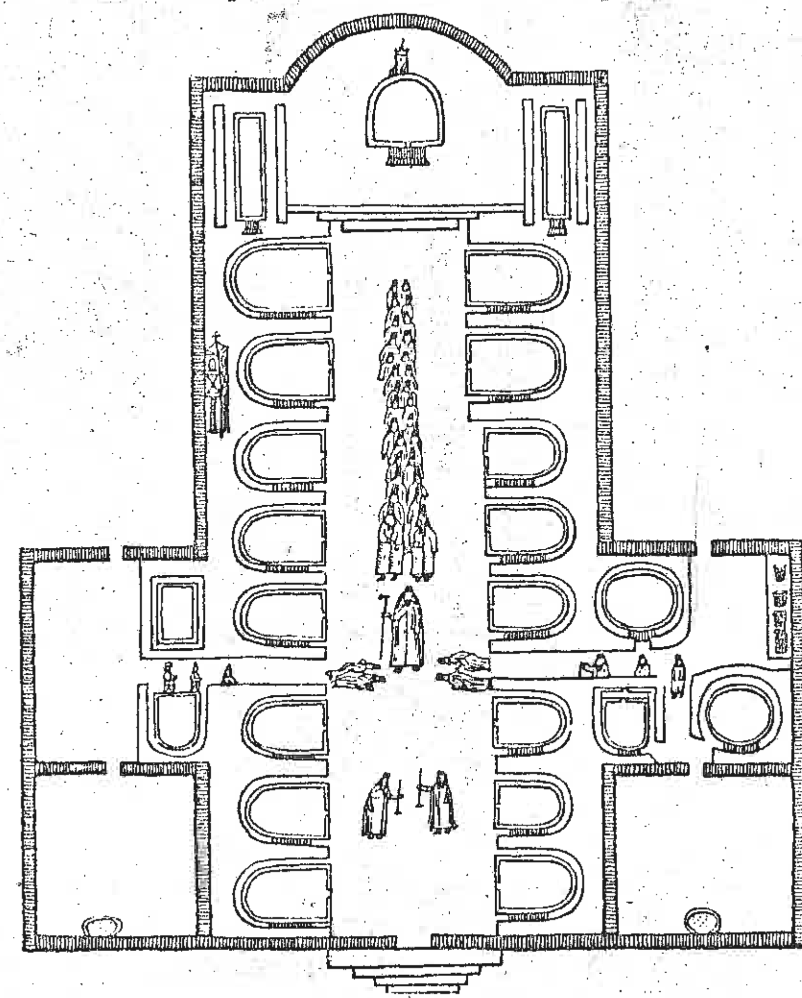
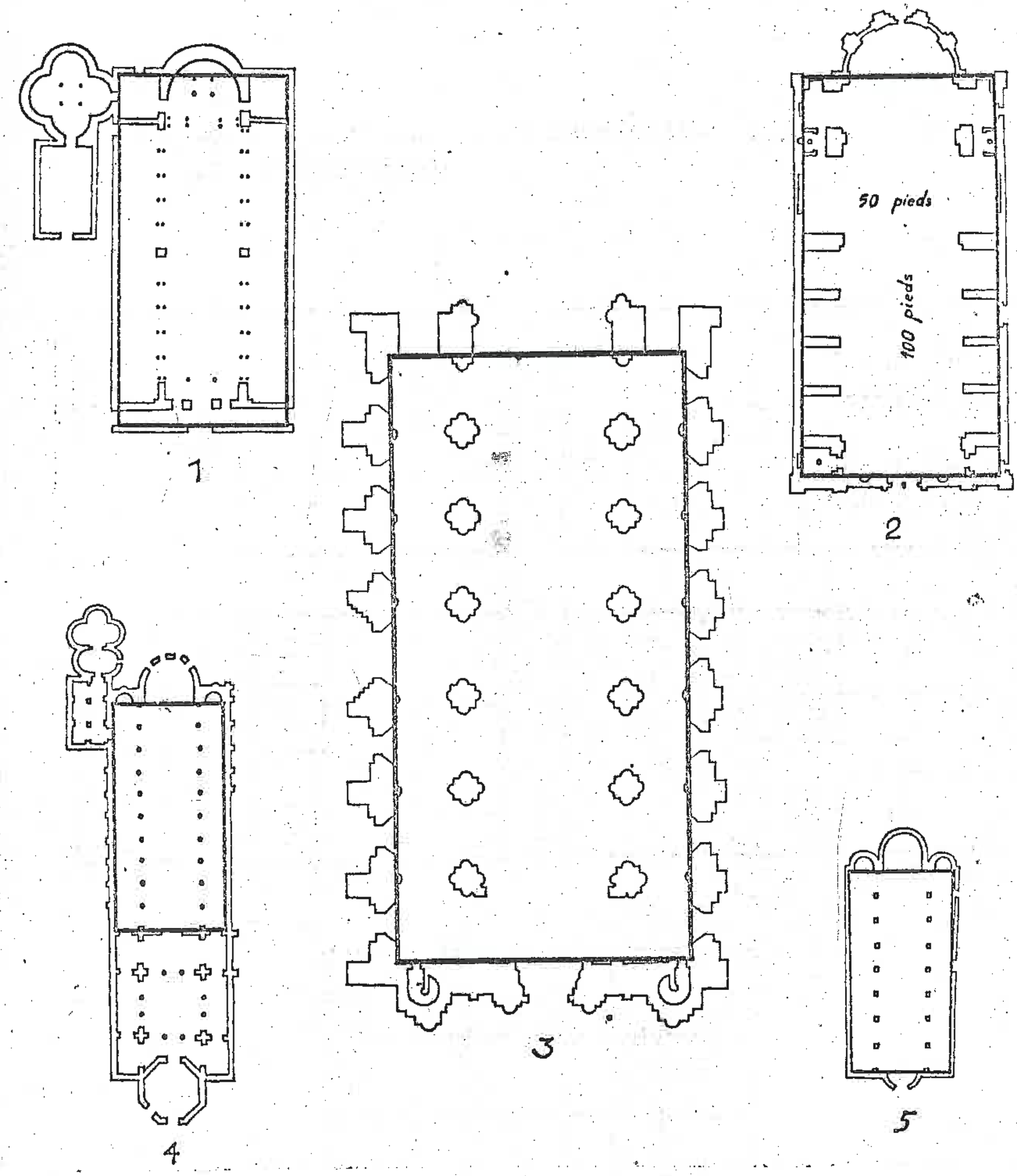


Fig. 43. Refrectorio del monasterio Gran Lavra en el Monta Athos. Aquí se ve al ábate saliendo en procesión después de una comida.

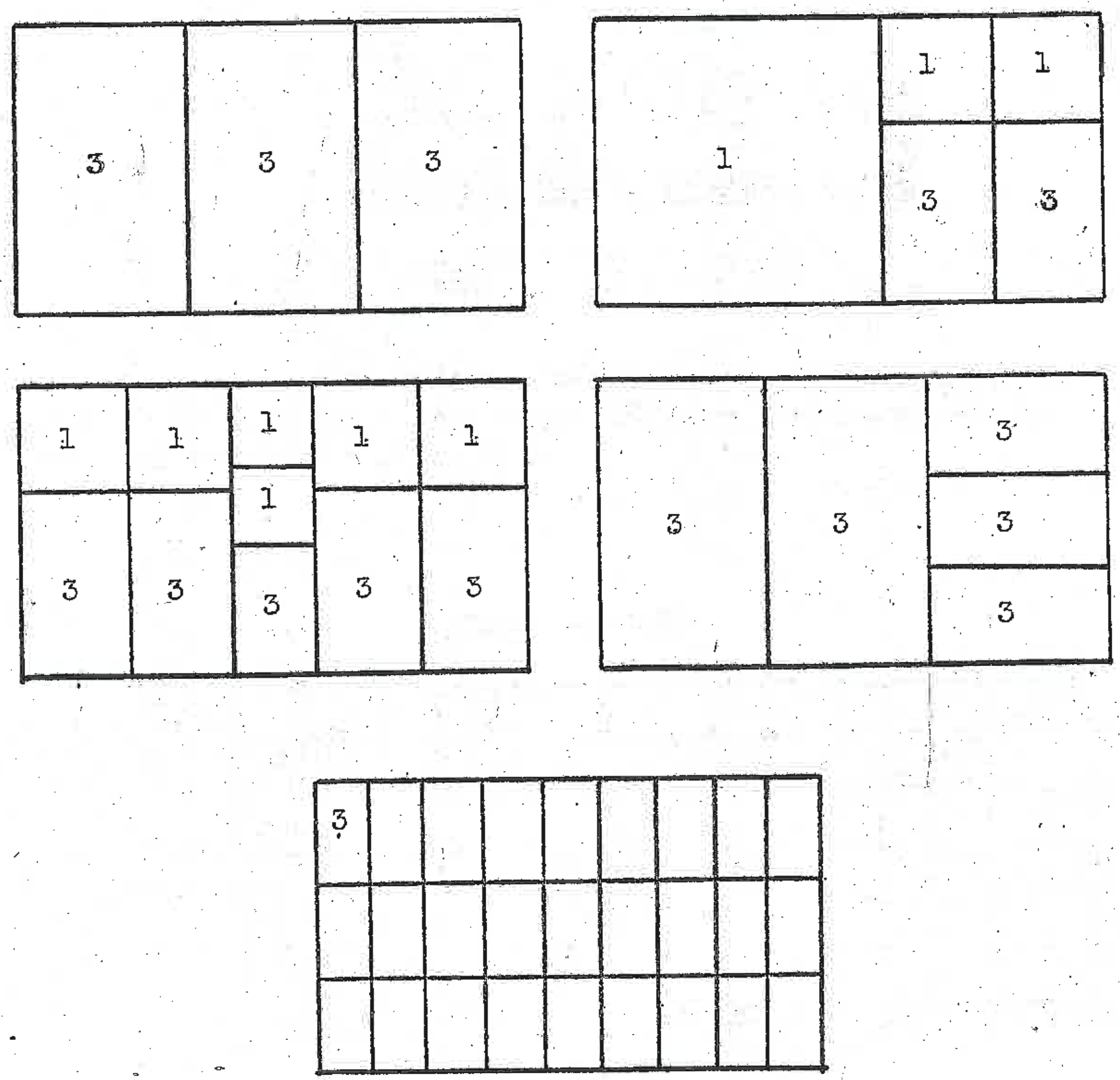


1- Basílica de Tigzirt. 2- Capilla de los Jesuitas de Blois (1624). 3- Iglesis de San-Benoit Sur Loire. 4- Catedral de Parenzo. 5- Basílica de Valpolicella.

Fig. 44. Construcciones renacentistas en las cuales se ha usa do el cuadrado doble.

El tema 3.

Este tema se compone de los rectángulos 3 y 3/2, el cuadrado y el cuadrado doble.



Fig, 45. Descomposiciones armónicas del rectángulo 3.

Este rectángulo fué muy utilizado por los arquitectos armenios medievales (fig. 46).

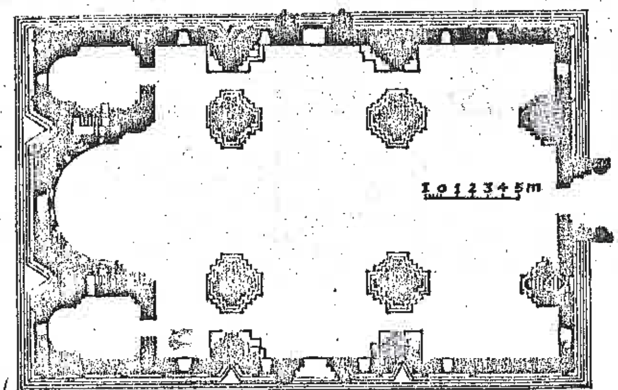


Fig. 46. La catedral de Ani (capital de Armenia durante el siglo X), la planta es una cruz inscrita en un rectángulo 3.

La siguiente constancia que tenemos de la aparición de este tema no es sino hasta el siglo XVI en el planeamiento de la catedral de Milán. (fig. 47).

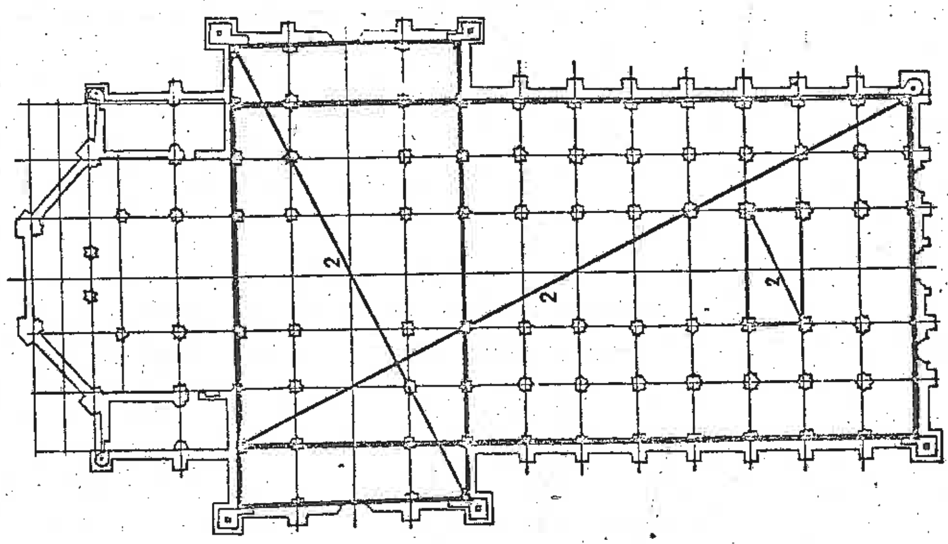


Fig. 47. Plano de la catedral de Milán (1521), basada en rectángulos 3 y cuadrados dobles.

El tema 5.

Este tema se compone de los rectángulos 5 y 5/2; de los rectángulos Ø, Ø/2 y Ø +1, y también del cuadrado doble y el doble cuadrado.

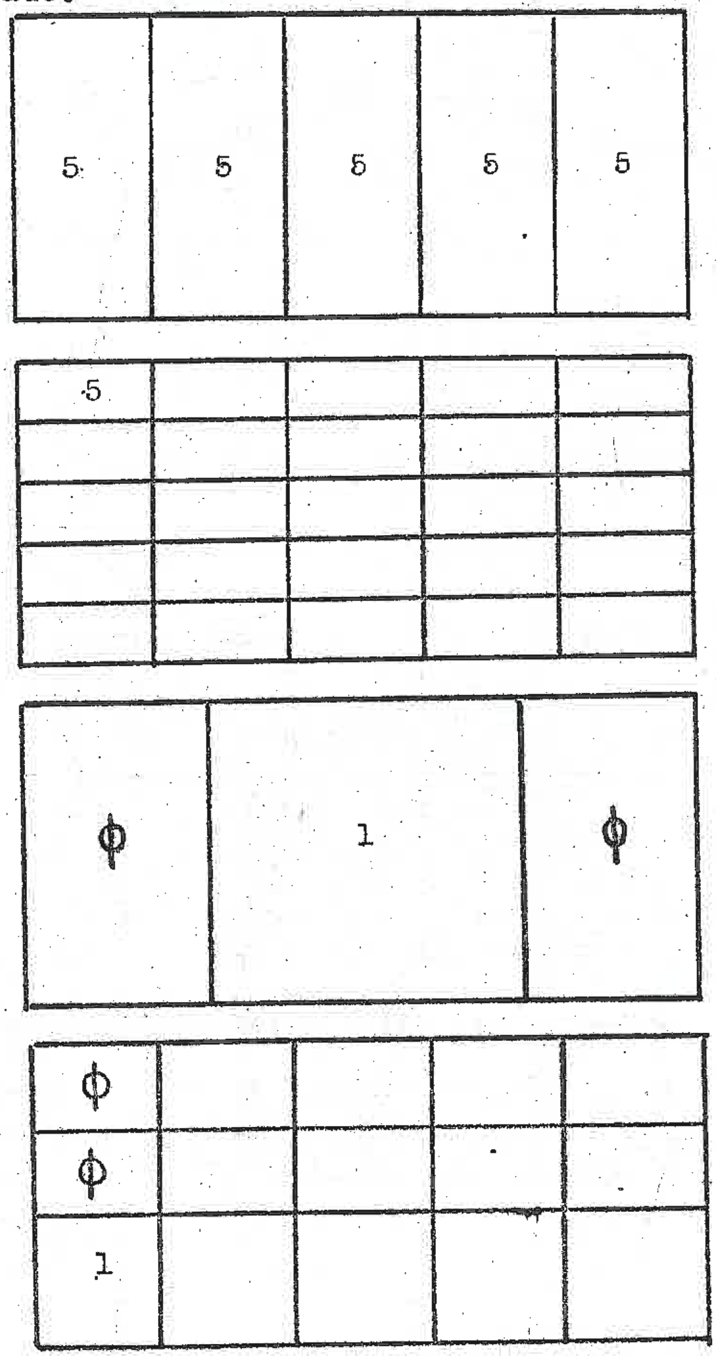


Fig. 48. Descomposiciones armónicas del rectángulo 5.

Cuando estudiamos la sección áurea vimos las proporciones áureas que presenta el Partenón; tal vez debido a la relación existente entre la sección áurea y el rectángulo 5, se encuentra que el trazado del Partenón también está basado en el rectángulo 5. (fig. 49). Y es así como, la mayoría de las

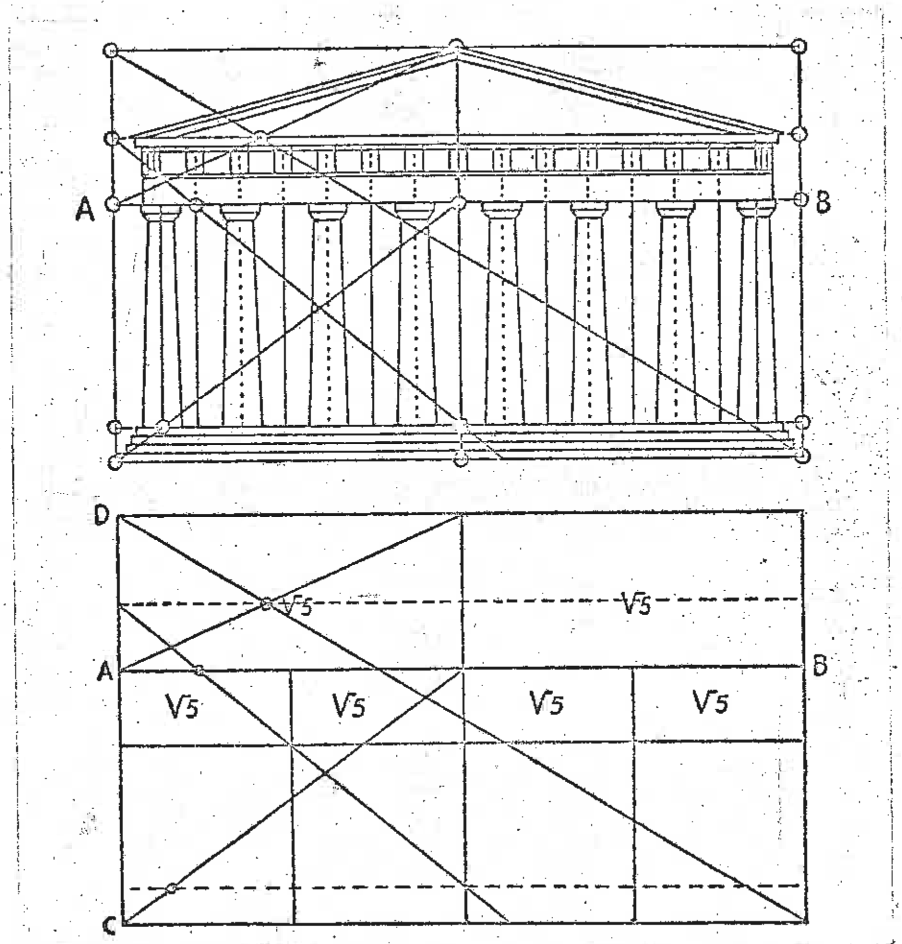


Fig. 49. Análisis del frontón del Partenón según Hambridge.

construcciones en que se utiliza este tema, no están diseñadas según el rectángulo 5, exclusivamente, sino que sus diseños se basan en la combinación de estos dos rectángulos.

Los rectángulos más utilizados durante el Renacimiento fueron el 3 y el 2; pero sinembargo, podemos encontrar el rectángulo 5 en algunas fachadas y plantas renacentistas. En la figura 50 aparece la sala de fiestas de lo que hoy es la alcaldía de Lyon; en su trazado puede observarse que los rectángulos:

Al

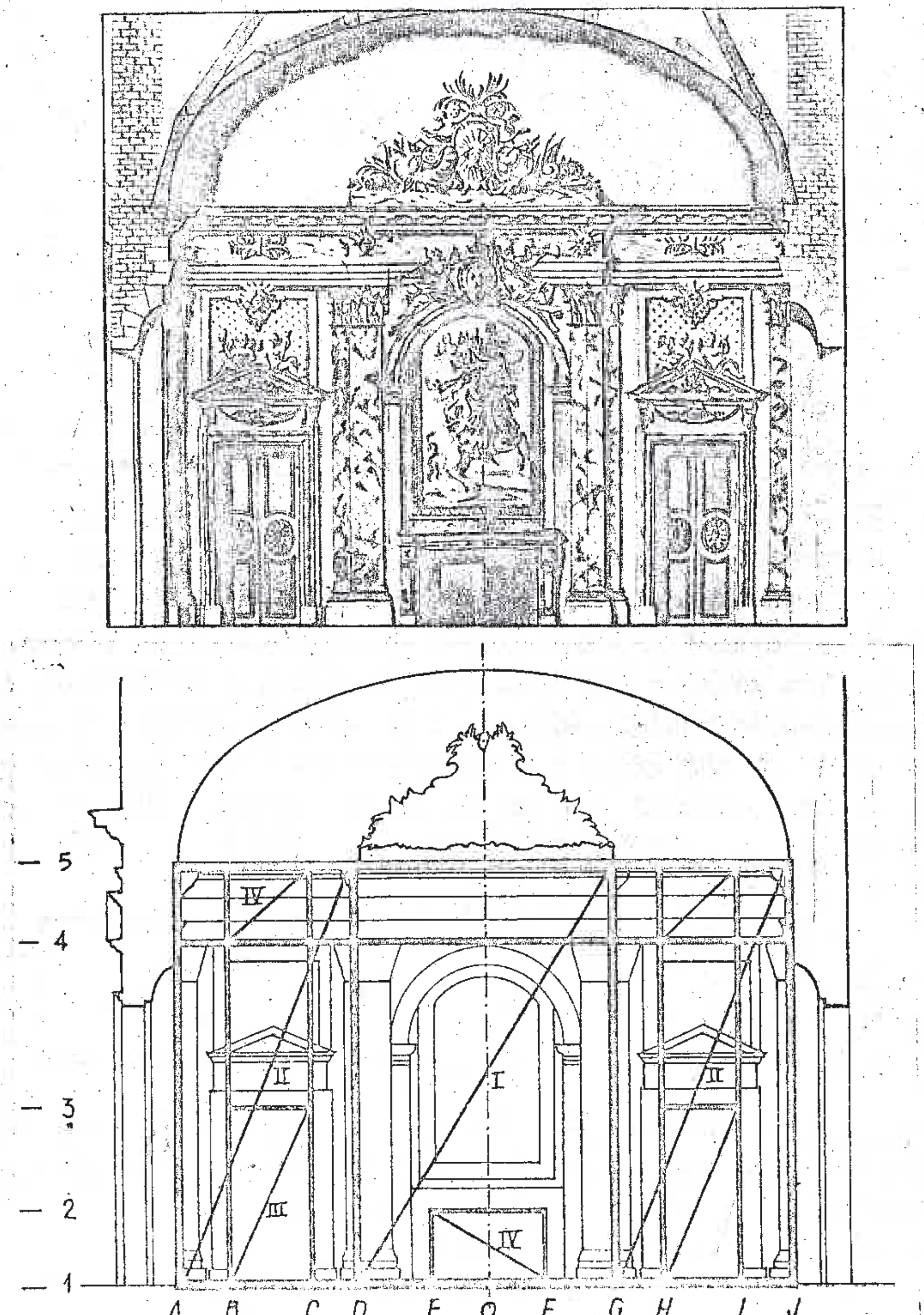


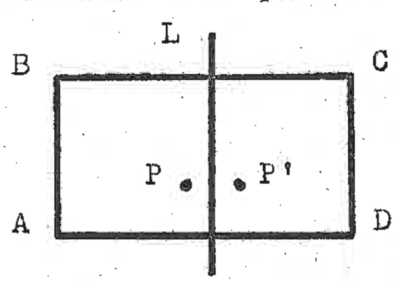
Fig. 50. Sala de fiestas de la alcaldía de Lyon.

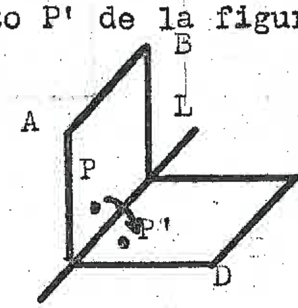
CAPITULO III

SIMETRIA

Simetría Bilateral

"La parte de la izquierda es igual a la parte de la derecha, o la parte de arriba es igual a la parte de abajo" sería la definición mas sencilla para un cuerpo que presenta simetría bilateral. Pero como no siempre sabemos cual es la "izquierda", la "derecha", el "arriba" ni el "abajo" es preferible recurrir a las matemáticas para dar nuestra definición de simetría bilateral: Una configuración bidimensional presenta simetría bilateral si existe un eje L tal que con una rotación de 180º ; efectuada en el espacio tridimensional, haga coincidir cada punto P con un único punto P' de la figura.





En el rectángulo de la figura 1 podemos tomar como eje de rotación la recta trazada por los puntos medios de BC y AD, E y F respectivamente. Comprobamos que mediante una rotación de 180° al rededor del eje L, todo punto P se hace coincidir con un único punto P' al otro lado de L; de tal manera que d (P,L) = d (P',L).

Notemos que la recta trazada por los puntos medios de AB y CD (G y H respectivamente) también sirve como eje de simetría. Concluimos entonces que una figura puede tener más de un eje de simetría (la circunferencia tiene un número infinito de tales ejes).

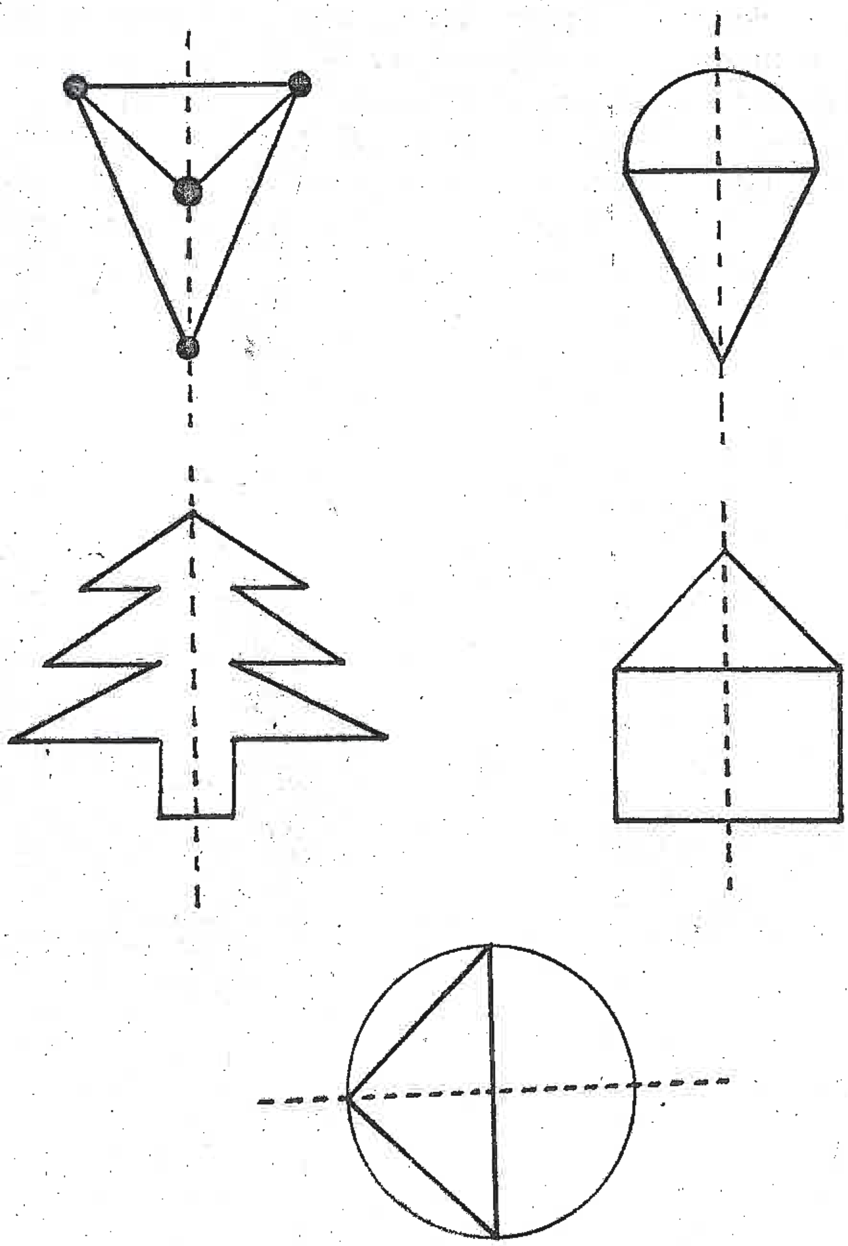


Fig. 2. Ejes de simetría de algunas figuras bidimensionales.

La simetría bilateral suministra uno de los métodos mas sencillos y mas antiguos de crear un dibujo. Cuando a un niño se le enseña por primera vez cómo hacer aquellos dibujos que se obtienen manchando con tinta una hoja de papel y doblándola luego por la mitad suele gritar de alegría al desdoblar la hoja y observar un dibujo bilateralmente simétrico. El niño piensa que es un dibujo "bonito" pues goza del sentido y la armonía de un dibujo hecho descuidadamente.

Similares a estos dibujos de los niños son las láminas del test psicológico de Rorschach (fig. 3), en las cuales el paciente trata de ver objetos y figuras en las manchas de tinta.

Fig. 3. Una lámina del test de Rorschach.

Rorschach mismo describió cómo se produjeron y fueron seleccionados estos patrones:

"Sobre una hoja de papel déjense caer algunas gotas de tinta que, al plegarla en dos, se extienden entre ambas mitades de la hoja. Mas no todos los manchones así obtenidos son utilizables. Es preciso que reunan determinadas condiciones. En primer lugar deben ser relativamente simples, pues las formas complicadas dificultan el cómputo de los factores que intervienen en la experiencia. La distribución de las manchas en la superficie de la lámina ha de cumplir, además, ciertos requisitos de composición o ritmo espacial, pues de lo contrario las láminas estarán desprovistas de plasticidad, con la consecuencia de que muchos sujetos rechazan las figuras como simples

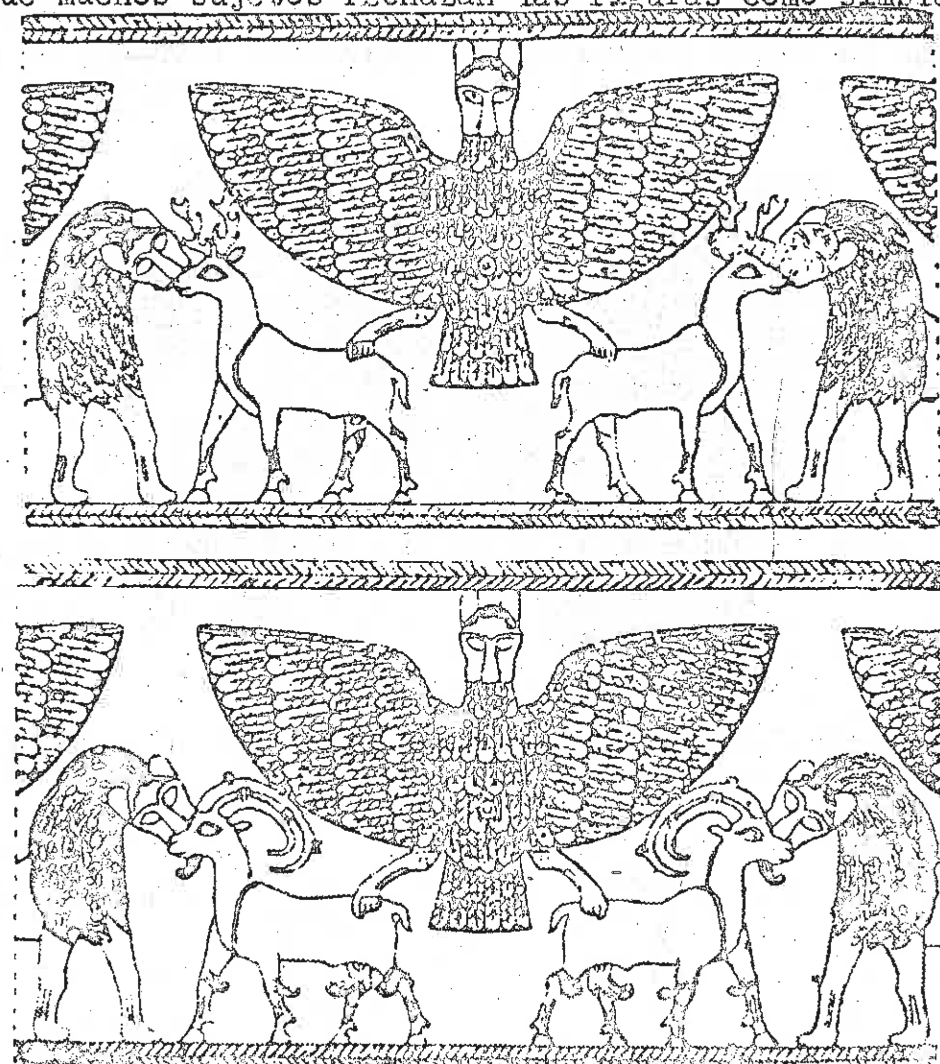


Fig. 4. Aguila con cabeza de león, de un vaso del rey Entemena.

manchas de tinta sin atinar a interpretarlas" (1).

Entre todos los pueblos antiguos, los sumerios parecen haber sido especialmente aficionados a la simetría bilateral estricta. (2).
Un dibujo típico es el del vaso de plata del Rey Entemena (2700 A.G.) que muestra un águila con cabeza de león, con las alas desplegadas y agarrando un ciervo con cada pata, ciervo que a su vez es atacado por un león; en la parte inferior se repite el mismo diseño pero los ciervos son reemplazados por cabras. (Fig. 4).

En el vaso de plata del Rey Entemena, el águila aparece de frente y guarda simetría bilateral, sinembargo algunas veces se quiso, por ejemplo, pintar un águila de perfil y seguir conservando la simetría bilateral; fué así como surgió el águila

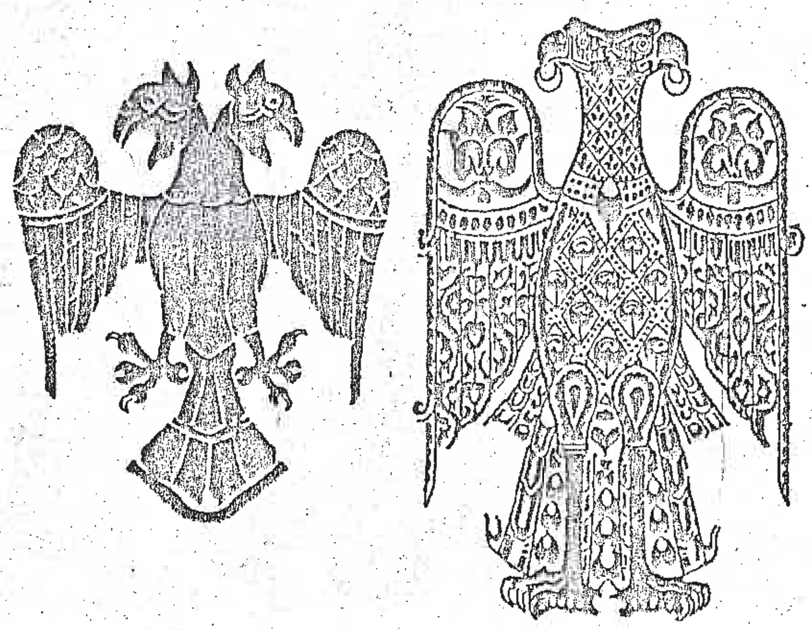


Fig. 5. Diseños de águila de dos cabezas en tejidos de seda; islámico (izquierda) y bizantino (derecha).

---

(1) Klopfer, Bruno y Helen H. Davidson. Técnica del Rorschach. (Buenos Aires: Editorial Paidós, 1969), pág. 11.

(2) Weyl, Hermann. La simetría. (Buenos Aires: Editorial Nueva Visión, 1958), pág. 19.

de dos cabezas, que tuvo su origen en Persia, fué adoptada por los jefes islámicos; luego, por los bizantinos, y al fin aparecería en los ornamentos de las catedrales de Europa occidental y en los escudos de armas de la Rusia de los Zares y del Imperio Austro-Húngaro. (Fig. 5). Triunfa entonces el deseo de simetría bilateral sobre el principio imitativo de la naturaleza, y es así como encontramos en el arte otras representaciones de animales con dos cabezas, doble número de patas, etc. (3).

Continuando con los sumerios encontramos el bajorrelieve que ha sido llamado "dos hombres con cabeza de águila" y cuyo diseño aparece en la figura 6. Los dos hombres son casi simétricos a primera vista, pero si nos fijamos más detalladamente, nos damos cuenta que como el hombre de la derecha está re

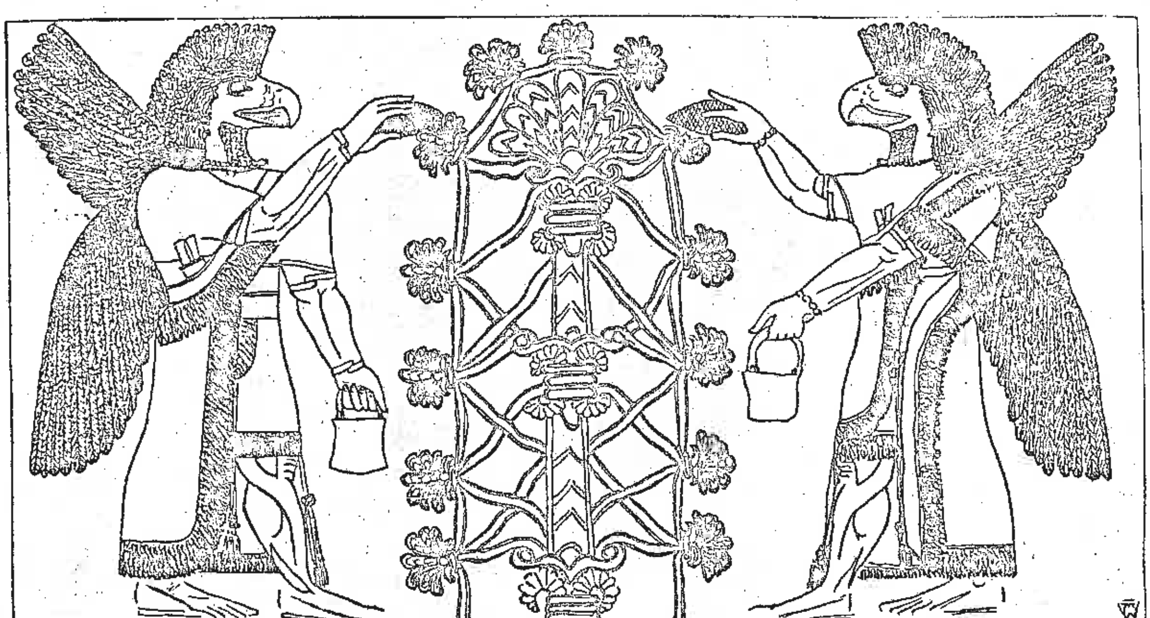


Fig. 6. Bajorrelieve sumerio: "dos hombres con cabeza de águila.

(3) En los dibujos de las piedras de sello cilíndricas de Babilonia están duplicados la cabeza y el cuerpo de un Dios taurino visto de perfil (Op. Cit. , pág. 20).

cogiendo los frutos con la mano dercha, el hombre de la izquierda debería estar recogiéndolos con la mano izquierda para que hubiese simetría bilateral. Sinembargo, los pies, las alas y la cabeza de ambas figuras están simétricamente dispuestos para la simetría de brazos y manos no podemos considerar una rotación de 180° en el dibujo sino en la escena misma que se quiere representar. El artista, entonces, ha utilizado la rotación de dos maneras diferentes para las distintas partes del cuerpo de los hombres con cabeza de águila.

De la cultura sumeria damos un salto de tres mil años hasta la Europa occidental del medioevo y el imperio Bizantino cuya iconografía y demás expresiones artísticas presentan una fuerte simetría bilateral.

Fig. 7. Patena Bizantina.

En una patena bizantina del siglo XII encontramos uno de los mas curiosos sacrificios de la realidad para el triunfo de la simetría bilateral. (Fig. 7); en el diseño de la patena no hay uno sino dos Cristos, y además los discípulos están ordenados en dos grupos, uno a cada lado. Sinembargo el hecho de que un Cristo ofrezca vino y el otro pan puede hacernos pensar que el artista solo pretendía expresar todo el misterio eucarístico en una sola representación.

En la Europa medieval las pinturas, en especial las religiosas fueron dibujadas con una fuerte simetría bilateral. En "De Vera Religione" de San Agustín (354-430) encontramos una refe encia acerca de la arquitectura simétrica de la Edad Media:

"Si pregunto a un arquitecto porqué habiendo construído una arcada en una de las alas del edificio hace lo mismo en la otra, él me respondía sin duda que es con el fin de que los miembros de su arquitectura simetricen bien en conjunto.

- Pero por qué ésta simetría os parece necesaria?
- Por la razón de que agrada.
- Pero quien sois vos para erigiros en árbitro de lo que debe agradar o no agradar a los hombres? Y de dónde sabéis que la simetría nos gusta?
- Estoy seguro de ello, porque las cosas dispuestas así tienen decencia, justeza y gracia; en una palabra, porque ésto es bello..."

En principio los edificios públicos (capitolios, Iglesias, Palacios de Justicia) albergan verdad y justicia, pero para que éstas dos cualidades sean más patentes, los arquitectos de este tipo de construcción han diseñado siempre sus obras en base a una simetría bilateral estricta, produciendo así un efecto de equilibrio que dá a la obra un carácter de justicia y verdad. Estas razones también pueden haber influído en la pintura, de modo que casi toda la imagen pictórica de Dios o de Cristo, éstos aparezcan de frente y nunca de perfil (4).

---

(4) Los pintores representan a Dios y a Cristo casi siempre de frente; aunque existen muchas imágenes de ellos en donde sus rostros están en posición "tres cuartos", son muy pocas las representaciones pictóricas en donde aparecen completamente de perfil; dos de ellas son "La creación del Hombre" de Miguel Angel, en la cual la cara de Dios aparece de perfil, y "Cristo en el Huerto" de Giovanni Bellini, en donde vemos a Cristo dándonos la espalda casi completamente.

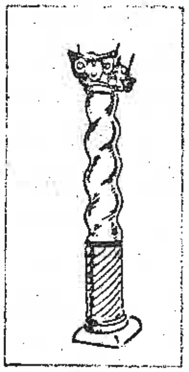


Fig. 8 Columna Salomónica del Barroco.

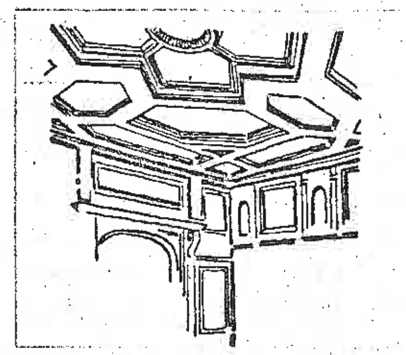


Fig. 9. Artesonado del Renacimiento Alemán.

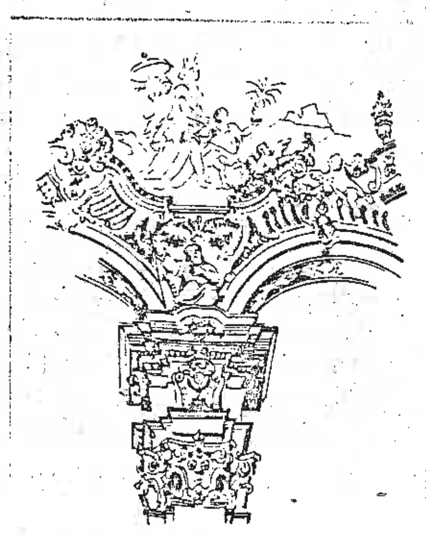


Fig. 10. Detalle del estuco, el capitel y la pintura del techo. Steinhausen: Catedral de San Pedro y San Pablo (1728-1733).

Durante el Renacimiento la simetría bilateral en la pintura es dejada de lado y reemplazada por un "equilibrio de masas" con respecto a un eje vertical en el centro. Sigue conservándose una simetría bilateral estricta en las construcciones públicas, y en general, en todas las obras arquitectónicas.

Durante el Barroco (siglo XVII) y más tarde en el Rococó (Reinado de Luis XV) La simetría bilateral es olvidada casi completamente. La composición en la pintura no está ni siquiera equilibrada; la columna, a diferencia de la de los otros períodos, pierde su simetría y se convierte en la solidificación (dorada casi siempre) de una espiral (Fig. 8); El cielo raso que casi siempre fue artesonado (dividido en compartimientos cuadrados, poligonales o redondeados, (Fig. 9) se convierte en un desordenado desfile de ángeles y otras figuras (Fig. 10) (5).

Para el gusto modermo la composición simétrica suele resultar insulsa, aunque parece haber una reviviscencia en la obra de algunos artistas Pop, así como en las pinturas geométricas de los nuevos abstraccionistas.

Observemos que en casi todos los casos de simetría que hemos visto, las figuras están colocadas de tal forma que el eje de simetría es vertical. Por qué ésta particularidad?. Diferentes elementos parecen haber influído en éste fenómeno. El primero es el hombre; el hombre lleva todo a sí mismo,

(5) Sin embargo, durante el Rococó fue muy utilizado el "complemento óptico"; objetos de arte instalados por parejas, no simétricos por sí sólos, sino formando un conjunto simétrico. El eje de simetría se sitúa al exterior del objeto individual (Fig. 11).

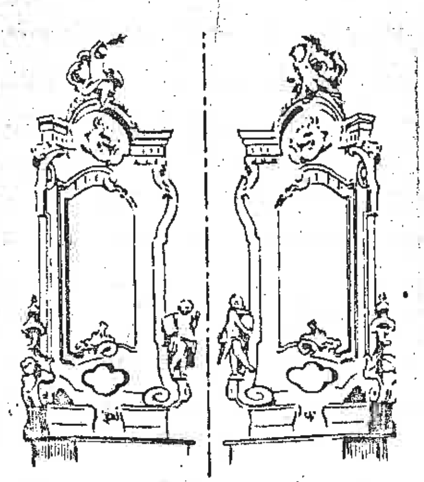


Fig. 11. Altares laterales en una Iglesia Rococó - (1750).

constató que su propio cuerpo estaba construído según un eje vertical de simetría y que lo mismo sucedía en los animales y en la mayoría de las formas vegetales. Hay, sin embargo, una escena natural corriente que tiene un eje horizontal de simetría: aquella en la cual, árboles y otros objetos se reflejan sobre la superficie de un lago o un rio en calma.

La enorme preferencia que la naturaleza muestra por los ejes verticales de simetría es debida al simple hecho de que la gravedad es una fuerza que actúa en línea recta de arriba a bajo. Una consecuencia de esto es que todas las cosas tienden a extenderse igualmente en todas las direcciones horizontales; un lago puede extenderse al norte o al sur, al este o al oeste, pero es incapaz de esparcirse en el aire.

Algunos artistas y caricaturistas se divierten dibujando figuras patas arriba que se transforman en otras cuando se les invierte (Fig. 12). Experimentamos una gran sorpresa al invertir una de estas figuras pues nunca esperamos que una figura se parezca a alguna cosa cuando se la invierte. La inversión de derecha a izquierda es tan corriente que es fácil imaginar lo que parecería trastrocado (flopped). En cambio es casi imposible imaginar como parece cuando se le dá la vuelta una figura estudiada cabeza abajo. (6).

Es fácil invertir una película cinematográfica de derecha a izquierda; contemplaremos la película un buen rato antes de darnos cuenta que está invertida; probablemente las letras de un anuncio o dos personas saludándose con la mano izquierda nos hagan caer en cuenta de la inversión.

Las películas también pueden ser invertidas en la dimensión del tiempo (que el The End" quede al comienzo), adquiriendo una cualidad absurda, de pesadilla: gente caminando hacia atrás, cigarrillos que se alargan al ser fumados, "cow boys" muertos que se levantan y caminando hacia atrás saltan a sus caballos, objetos que por obra de magia son atraídos por las manos de las personas, etc.

En la danza, la simetría bilateral desempeña también un importante papel; en muchos ballets se sigue una rutina en la cual las versiones a la derecha y a la izquierda de los pasos

(6) Gardner, Martin. Izquierda y derecha en el cosmos. (Navarra: Alianza Editorial, 1972, pág. 45).

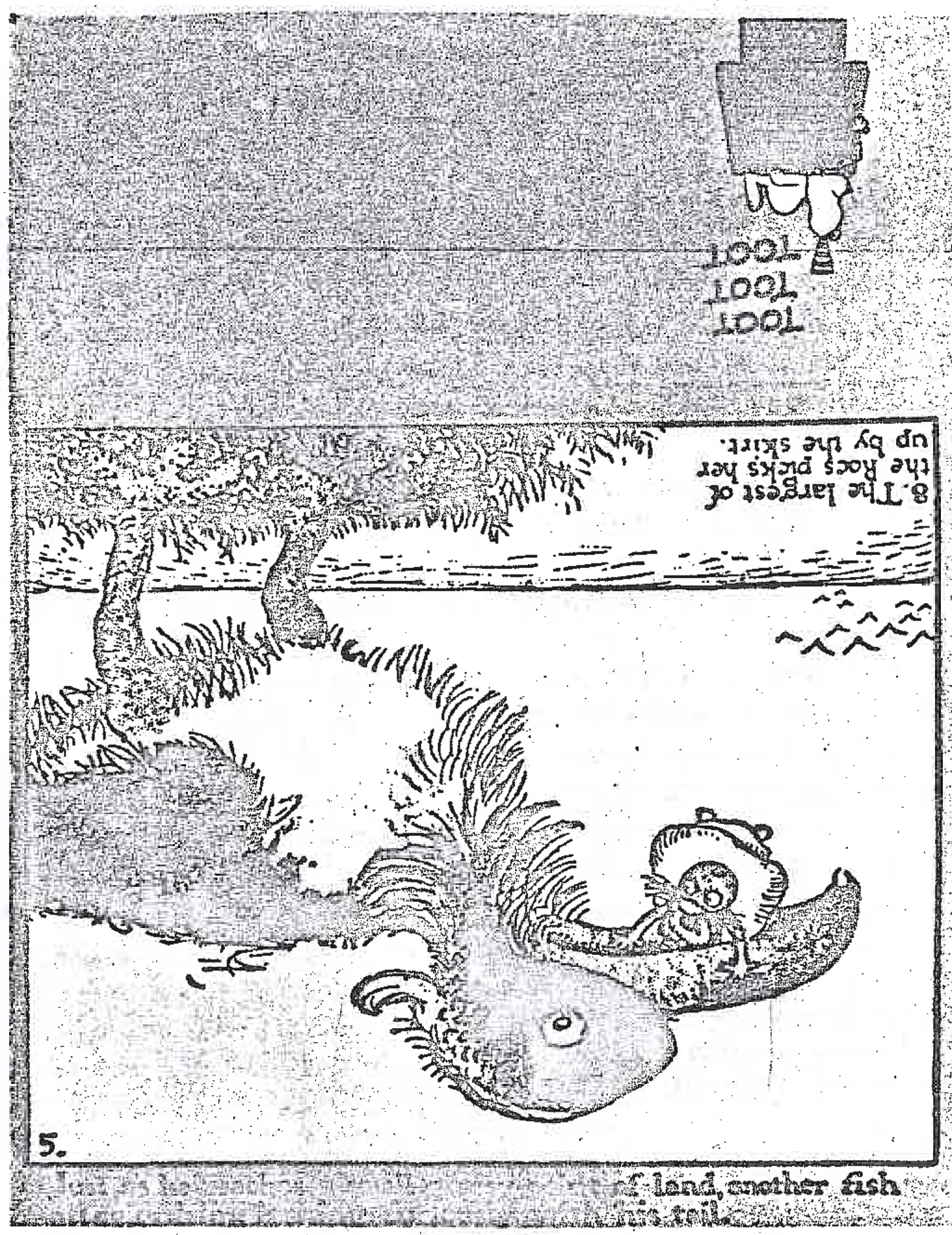


Fig. 12. Gustave Verbeek: un cuadro de "Los Trastrueques de la damita Lovekins y del viejo Muffaroo: Una historia de pescados. El caricaturista utilizó un sistema de simetría para encajar doce escenas en seis cuadros.

alternan desde el principio hasta el fin. Sería posible crear un ballet con simetría bilateral, esto es, que al ser fotografiado y proyectado al revés se viera igual que en la realidad? Seguramente la danza al revés resultará grotesca, sobre todo si está sincronizada con música que se desarrolla hacia adelante.

Podría pensarse que la simetría bilateral no desempeña ningún papel en la música, pero si consideramos las partituras, entonces una imagen simétrica de una melodía se obtiene ejecutando la música al revés. Esto puede hacerse fácilmente mediante una cinta magnetofónica, pero notaremos que la música tocada al revés es casi siempre un terrible embrollo de disonantes. (7) Sin embargo, durante el siglo XV muchos compositores construyeron cánones (Compuestos de dos o mas melodías cantadas simultáneamente) en las cuales una melodía era la otra al revés. (8).

La música puede ser también puesta "patas arriba": tocando la melodía con la hoja de la partitura "patas arriba". Mozart escribió un cánon en que la segunda melodía exhibía los dos tipos de inversión; es decir, era la misma primera melodía puesta "patas arriba" y leída de atrás a delante. (9).

En literatura también podemos encontrar simetría. Palabras "palindrómicas" son palabras bilateralmente simétricas que suenan lo mismo en las dos direcciones, como radar, somos, rodador. Una palabra "semordnilap" (palíndromes" leído al revés) es una palabra que se convierte en otra cuando es invertida, (10) como amor (Roma), raza (azar), amar (rama), osar (raso). Cuando una frase entera tiene simetría bilateral se llama palíndrome, algunas de estas frases son:

Anita lava la tina.
Dábale arroz a la zorra el abad.
Las Nemocón no comen sal.

Y en inglés: A man, a plan, a canal-Panama.

---

(7) Problemas de esta especie estan siendo estudiados por la escuela alemana llamada de "música electrónica" cuya principal figura es W. Stockhausen.

(8) Op. Cit., pág. 47.

(9) Ibid.

(10) Op. Cit., pág. 48.

También la poesía puede ser pensada como una serie de sonidos ordenada a lo largo de la dimensión temporal. Muchos hábiles poetas han empleado deliberadamente la simetría por rotación para obtener efectos sonoros especiales. Por ejemplo Robert Browning, en su poema lírico "Meeting at night" empleó las rimas según un esquema "abccba" de forma que los sonidos así dispuestos dieran el sentimiento de los movimientos de las olas del mar.

SIMETRIA TRASLATORIA

Sea C una configuración bidimensional; se dice que C presenta simetría traslatoria si existe una traslación, t_a, en la dirección paralela a la configuración, que haga corresponder a cada punto p de C un único punto p' también de C, situado a una distancia a de p. Fig. 13.

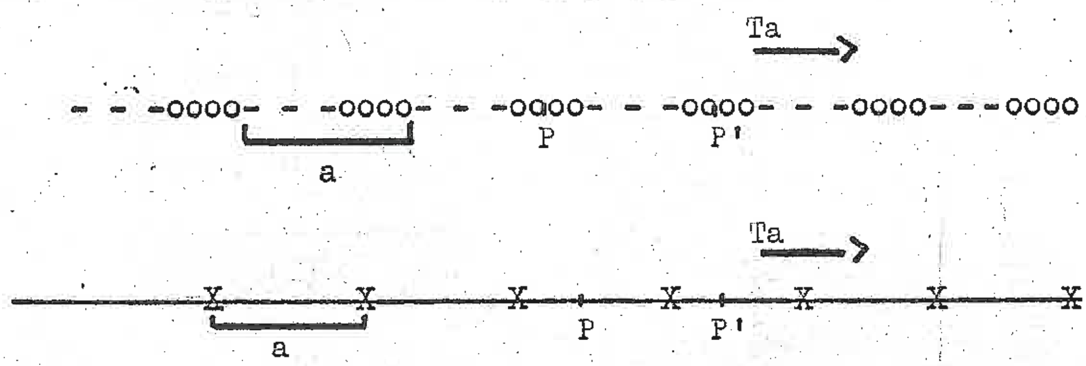
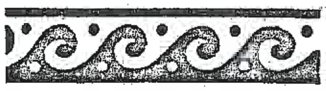


Fig. 13.

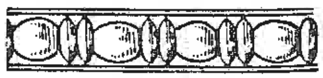
Notemos que si t_a desplaza el diseño en una distancia a, entonces t_{na} lo desplaza en la distancia na $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. En este sentido, todas las traslaciones que en un diseño transportan sobre sí una configuración infinita (al estudiar la simetría traslatoria de alguna figura siempre la consideramos infinita) son múltiplos de una traslación básica t_a.

El mejor ejemplo de simetría traslatoria en el arte lo encontramos en las bandas ornamentales de los frisos. (Fig. 14).



a. Meandro: Griego.

b. Friso palmeado: desde la antiguedad.

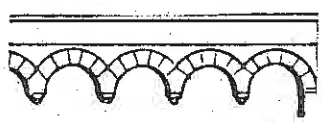


c. Astrágalo de cuentas: jónico-griego.

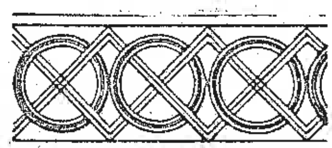
d. Cima: jónico-dórico.

e. Friso de tenazas; época de las migraciones, siglo VI.

f. Friso de soga: Románico-anglonormando.



g. Friso de arcos de medio punto: Románico.



h. Entrelazos: Románico

i. Friso de hojas: Románico.

j. Friso de hojas de parra: Gótico primitivo.

Fig. 14. Frisos utilizados en las diferentes épocas de la arquitectura.

Como las bandas ornamentales consisten en una faja bidimensional (11) a lo largo de una línea central, pueden tener una segunda dirección transversal. Respecto de esta segunda dirección pueden tener otras simetrías; la configuración puede, por ejemplo, superponerse sobre si misma por rotación respecto del eje central (Fig. 15), o la configuración puede superponerse sobre sí misma mediante una rotación con respecto a un eje perpendicular a la línea central combinada con una traslación $t_{a/2}$ (Fig 16).

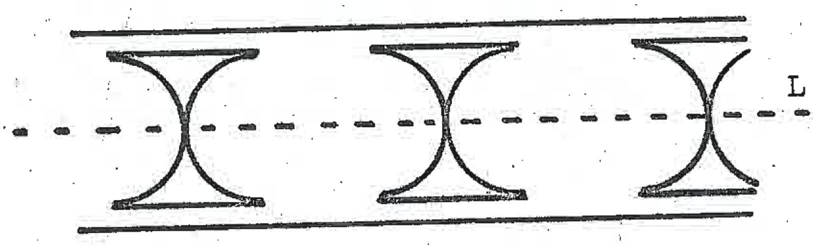


Fig. 15. Simetría traslatoria compuesta con simetría bilateral con respecto al eje central L.

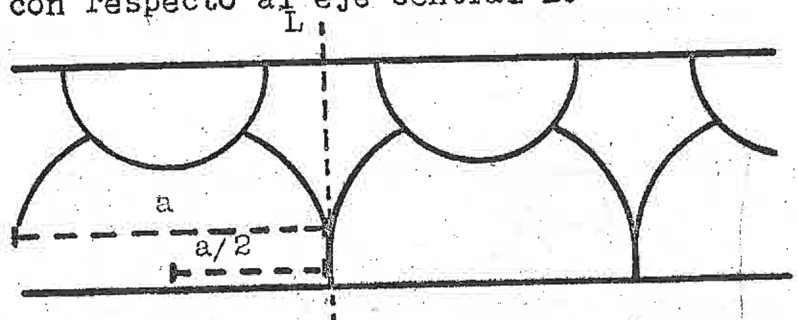


Fig. 16. La simetría traslatoria t_a también puede expresarse como una traslación $t_{a/2}$ compuesta con una rotación de 180º con respecto del eje L.

(11) En algunas bandas ornamentales, frisos tallados en piedra por ejemplo, hay profundidad también, pero en nuestro estudio de las simetrías traslatorias estamos interesados únicamente en las simetrías que presenta la proyección de la figura sobre el plano.

El friso puede estar formado por dos simetrías traslatorias diferentes; una traslación t_a para una parte del friso y una simetría traslatoria $t_{a/2}$ compuesta con una rotación de 180° con respecto a un eje perpendicular a la dirección de la traslación para la otra parte del friso.(Fig. 17).

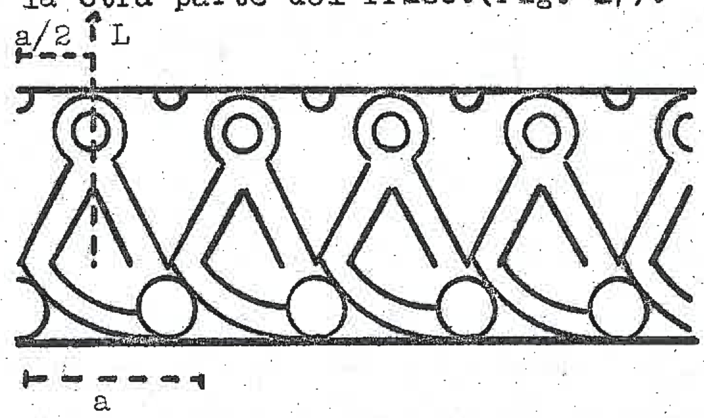


Fig. 17. Friso de tenazas del siglo VI: Dos simetrías traslatorias diferentes en un mismo friso.

La configuración del friso puede expresarse mediante una traslación $t_{a/2}$ y una rotación con respecto al eje central L. (Fig. 18).

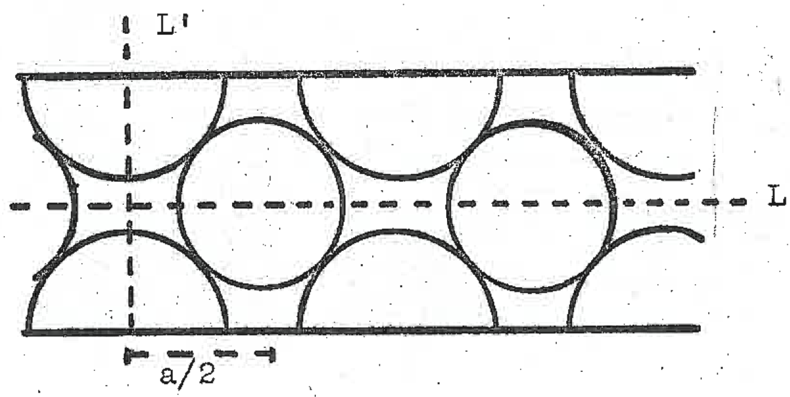


Fig. 18.

El friso de arqueros persas del palacio de Darío en Susa (tenemos nuevamente a los sumerios) ejemplífica también la simetría traslatoria; pero debe notarse que la traslación básica cubre el doble de la distancia entre hombre y hombre, pues los trajes de los arqueros se alternan.

Fig. 19. Friso de arqueros en el palacio de Darío en Susa (Sumeria).

El Whitehall de Londres (Fig. 20) puede servir de ejemplo de simetría traslatoria en arquitectura. Podrían añadirse innumerables ejemplos pues en la arquitectura de un edificio es frecuente encontrar en cada piso la repetición de un mismo diseño, esto se encuentra principalmente en las construcciones renacentistas en las cuales predomina lo horizontal sobre lo vertical.

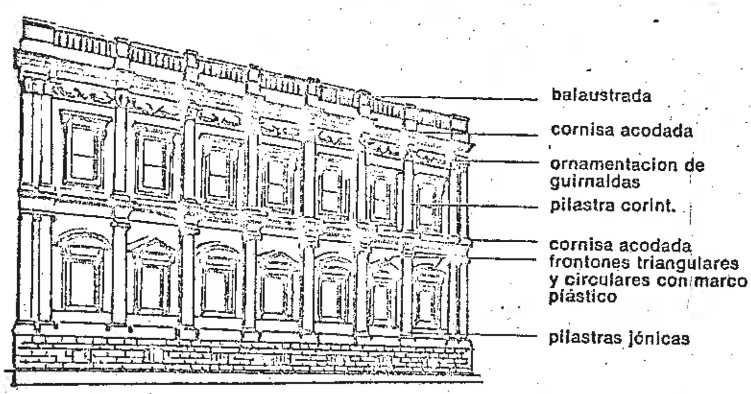


Fig. 20. Whitehall de Londres (siglo XVII). Repetición de un diseño en cada piso; en el primero se utiliza el orden jónico con alternación de ventanas de entablamiento circular y triangular, y en el segundo se mezcla el corintio con la ornamentación inglesa de guirnaldas.

Los mas antiguos ejemplos de simetría traslatoria en pintura los encontramos en los frescos que adornan las tumbas de los faraones egipcios. Aunque no todas las figuras de estas pinturas son iguales sí podemos observar que se repite el mismo diseño de la cara de los diferentes personajes de la composición (Fig. 21).

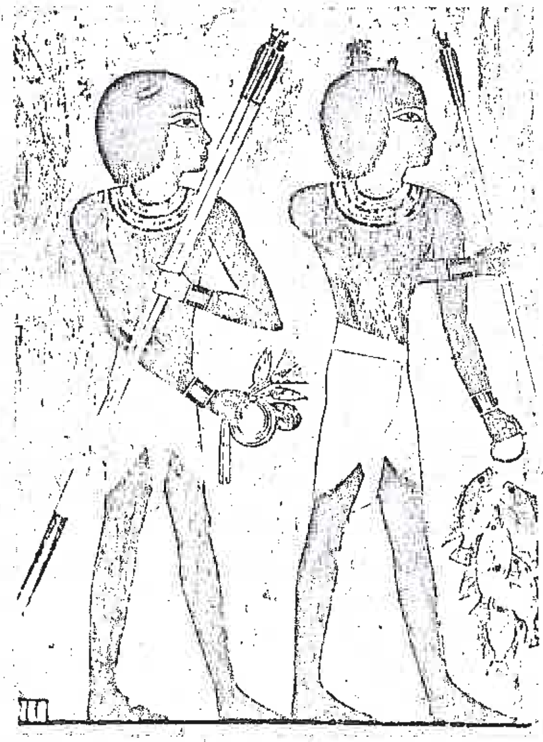


Fig. 21. Jóvenes llevando flechas. Tebas, tumba de Kenamon (siglo XV a.c.).

En "Las Plañideras", fresco de la tumba de Ramose, no solo se ha trasladado el mismo diseño de la cara y el cuerpo de las mujeres, sino que también se le han aplicado rotaciones y homotopías (aumentación o disminución de la figura). (Fig. 22).

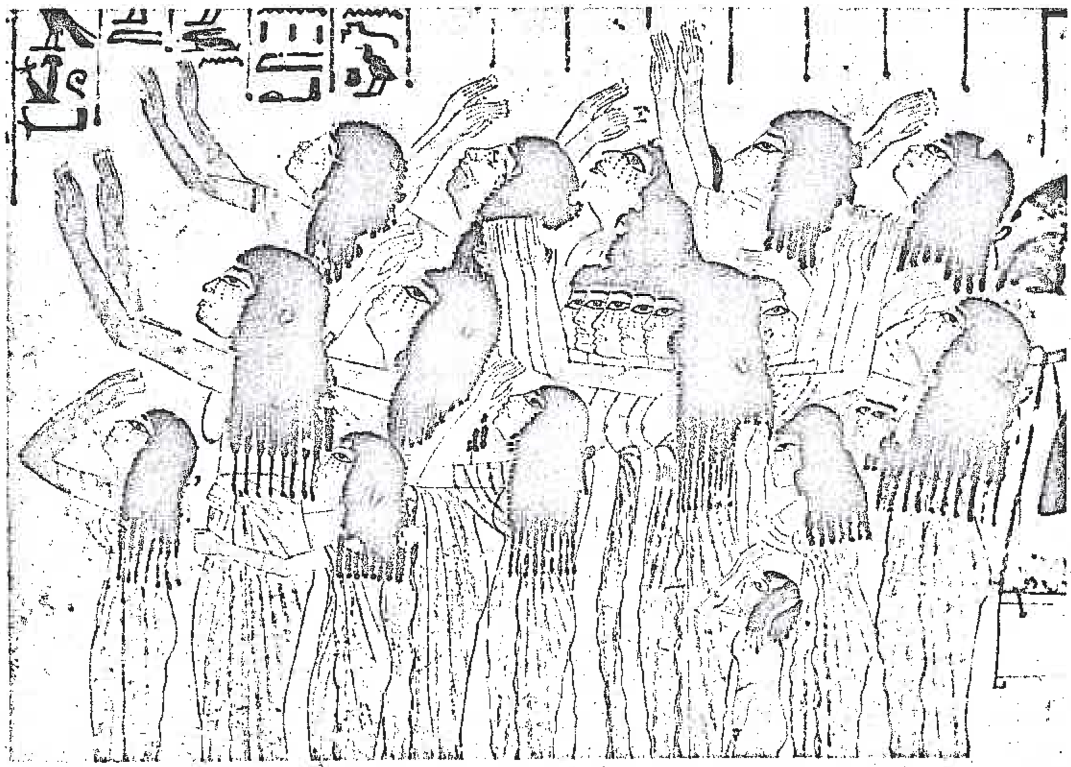


Fig. 22. Las Plañideras. Tebas, tumba de Ramose (siglo XIV a.c.)

Simetría Cíclica.

Aparece en su forma mas simple cuando dividimos en partes iguales la superficie en una circunferencia mediante radios. Si por ejemplo, dividimos la superficie en cinco partes iguales (Fig. 23), obtenemos una simetría cíclica pentagonal que se superpone sobre si misma mediante rotaciones de $360^\circ/5$ y sus múltiplos. La quinta iteración es la identidad (rotación de 360°). Obtenemos un grupo cíclico de orden cinco cuyos elementos son rotaciones de $360^\circ/5$, $(2x360^\circ/5$, $(3x360^\circ)/5$, $(4x360^\circ)/5$ y $(5x360^\circ)/5 \quad 360^\circ$.

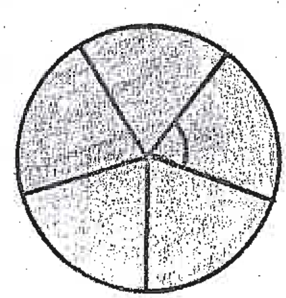


Fig. 23

Tal vez los ejemplos mas conocidos de simetría cíclica (pero no bilateral) son la svástica (rotaciones de 360º/4) y la estrella de cinco puntas (rotaciones de 360º/5) con que los brujos medievales solían invocar al diablo (Fig. 24).

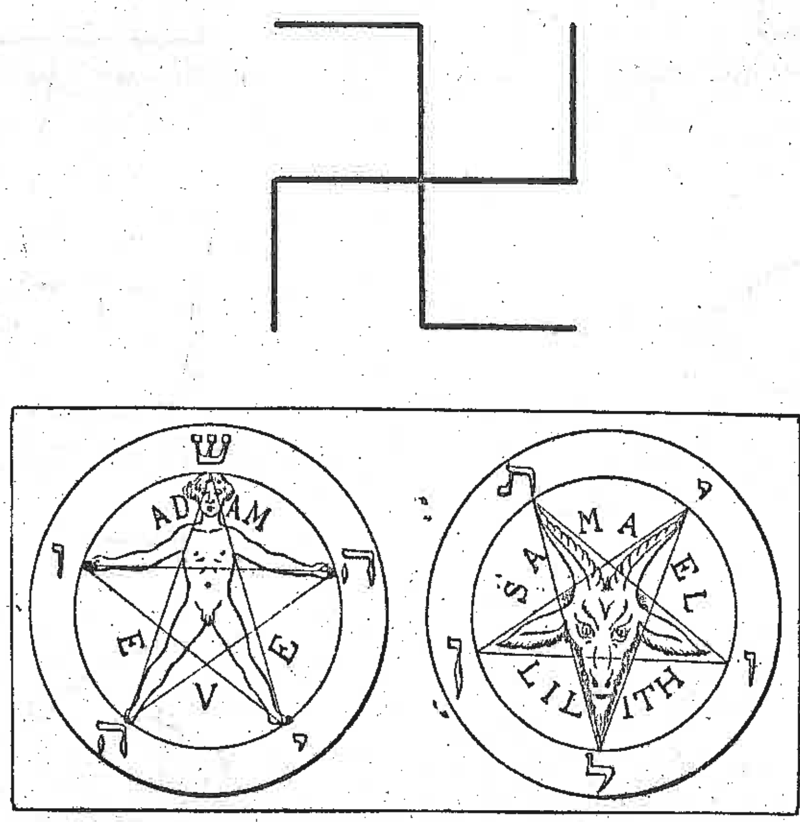
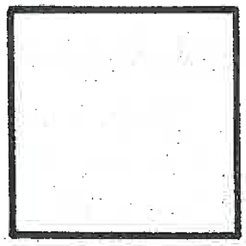
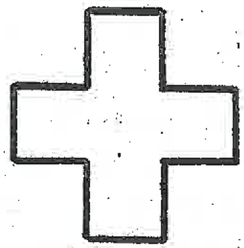


Fig. 24.

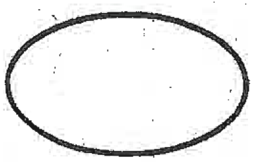
Algunas de las figuras que tienen simetría cíclica también presentan simetría multilateral: (una simetría bilateral por cada uno de los elementos del grupo que conforma la simetría cíclica (Fig. 25).



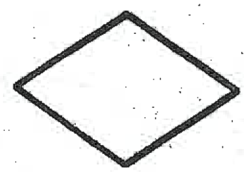
Rotaciones de 360º/4.



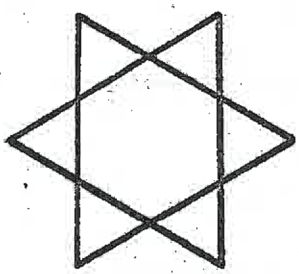
Rotaciones de 360º/4.



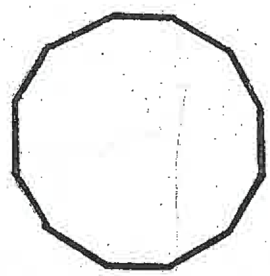
Rotaciones de 360º/2.



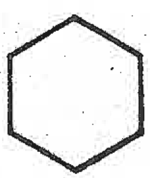
Rotaciones de 360º/2.



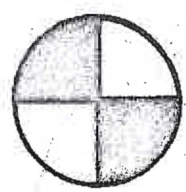
Rotaciones de 360º/6.



Rotaciones de 360º/12.



Rotaciones de 360º/6.



Rotaciones de 360º/2.

Fig. 25. Figuras con simetría cíclica y multilateral.

Simetría Cilíndrica.

Si se toma una banda ornamental (o cualquier otra configuración que presente simetría traslatoria) cuyo motivo repetido es de longitud a y se envuelve alrededor de un cilindro cuya circunferencia es múltiplo entero de a, 20a por ejemplo. Se obtiene una configuración que se superpone sobre sí misma mediante rotaciones con ángulos de n $360^{o}/20$ alrededor del eje del cilindro (Fig. 26).

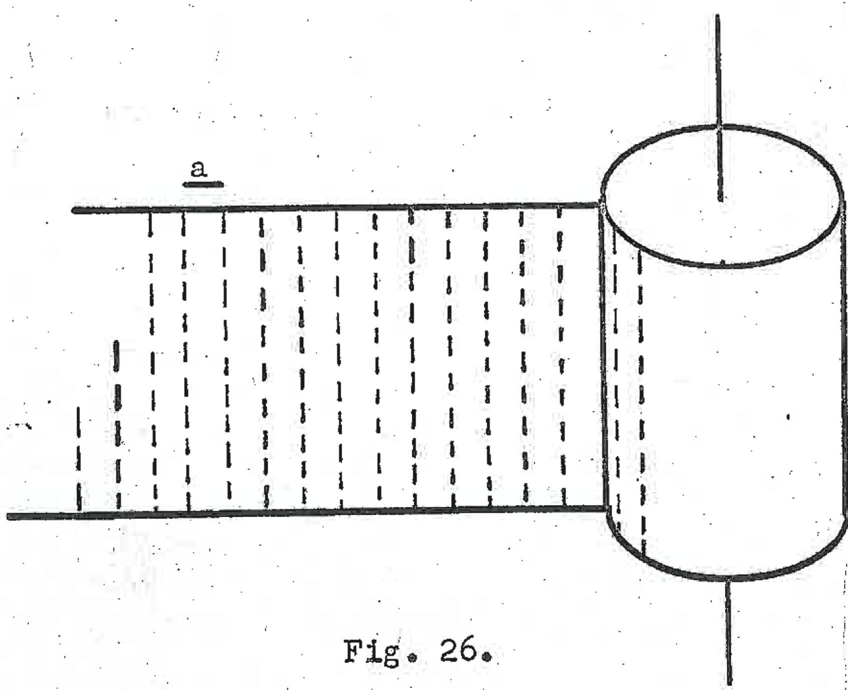


Fig. 26.

La vigésima iteración es la rotación de 360^{o}, o lo que es lo mismo, la identidad. Obtenemos así un grupo cíclico de orden 20.

Este tipo de simetría lo encontramos principalmente en los vasos y cántaros griegos del período jónico (siglo VII a. c.); en los capiteles de las columnas, (Fig. 27) y en las torres y demás edificios cilíndricos. (Fig. 28).

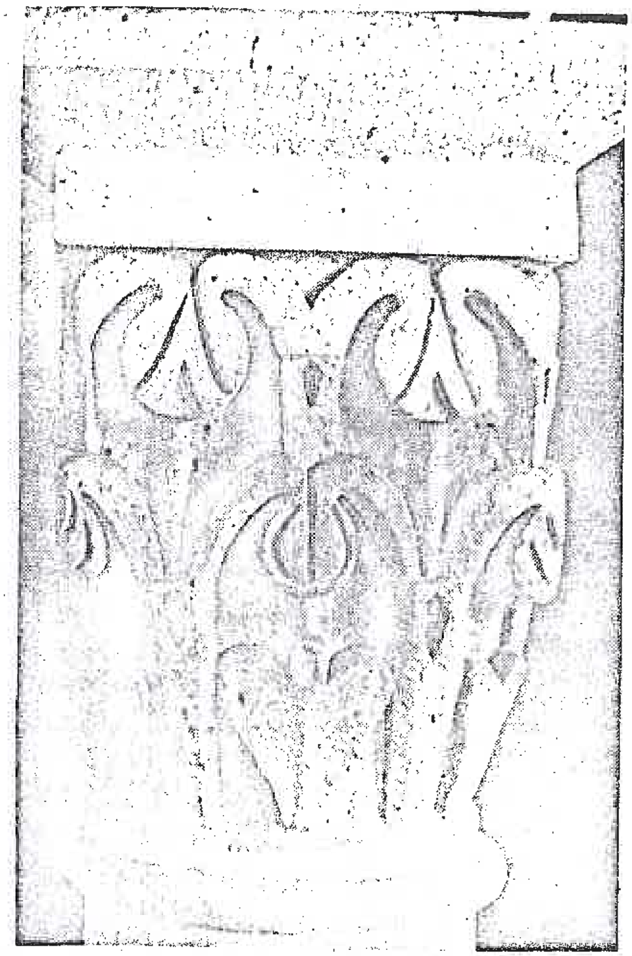


Fig. 27. Capitel Románico.

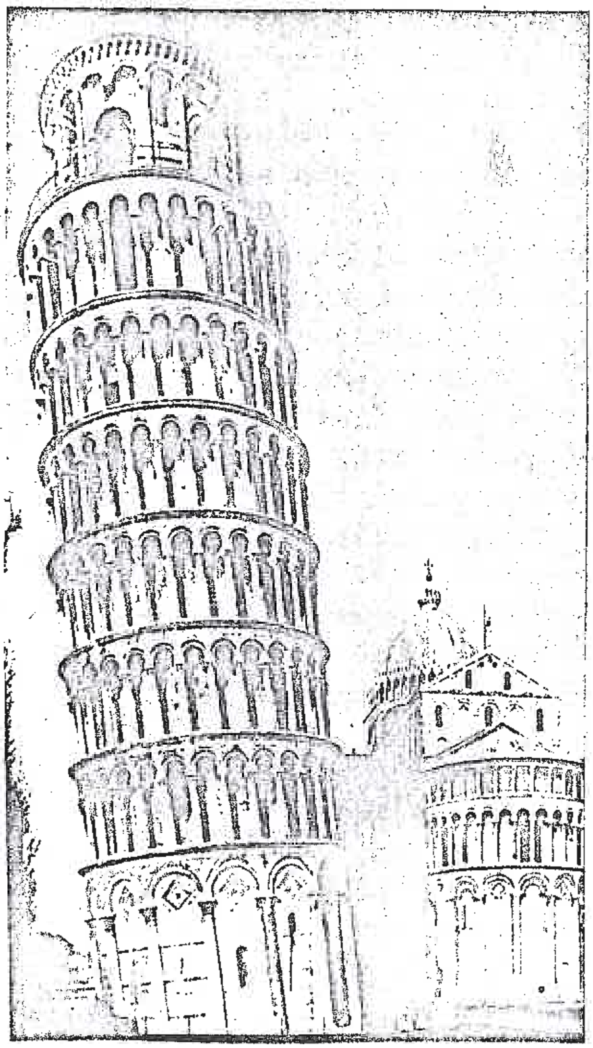


Fig. 28. Torre inclinada de Pisa.

CAPITULO IV

TESELACIONES

Particiones del plano

Una familia F de conjuntos es una partición de un conjunto E si:

i. F es un cubrimiento de E (es decir, E está contenido en la unión de los conjuntos de la familia F).

ii. Los conjuntos de la familia F son subconjuntos no vacíos de E.

iii. Los conjuntos de la familia F son disjuntos dos a dos.

Conociendo la definición de partición de un conjunto podríamos preguntarnos como formar una partición del plano. Sería posible hacer una partición del plano por medio de triángulos, cuadrados, pentágonos, exágonos u octágonos regulares ? Recordemos que el ángulo alrededor de un punto en el plano es de 360°, entonces, para poder formar una partición del plano por medio de la repetición de cierta (una sóla) figura geométrica es necesario que el ángulo en el vértice de ésta figura sea un submúltiplo de 360° (de lo contrario no se cumplirán las condiciones i o iii dadas en la definición.

Como el ángulo en el vértice del cuadrado es de 90°, en el del triángulo equilátero es de 60°, en el del pentágono regular es de 108°, en el del exágono regular es de 120° y en el del octágono regular es de 135° concluímos que sólo con tres, (el triángulo equilátero, el cuadrado y el exágono regular) de éstas cinco figuras geométricas es posible formar una partición del plano (Fig. 1).

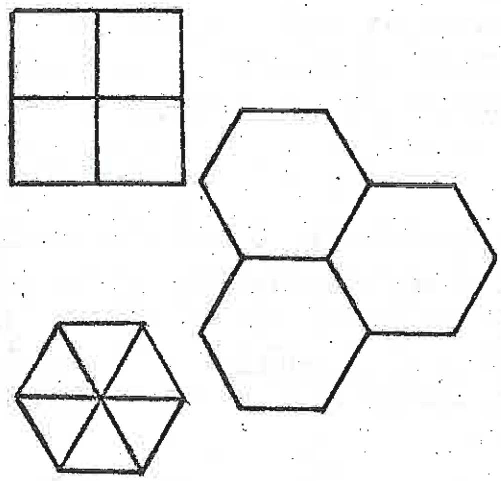


Fig. 1. a.

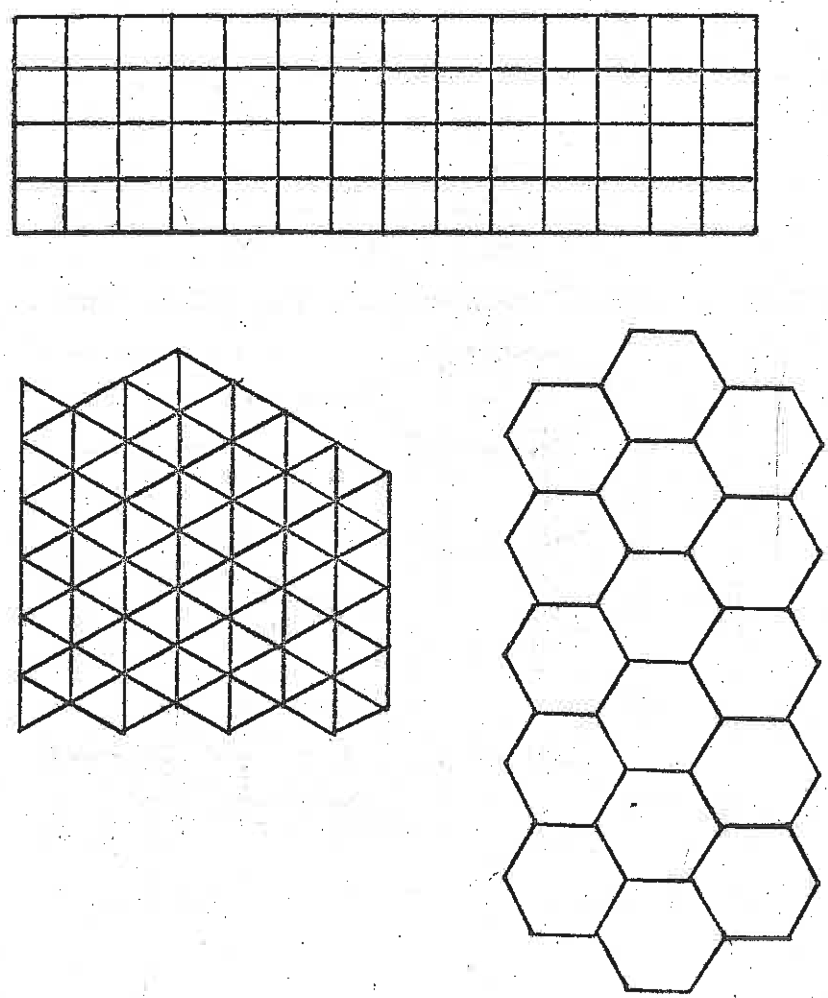


Fig. 1. b.

En la figura 2 observamos que para hacer una partición del plano por medio de octógonos ha sido necesario introducir otro elemento geométrico: el cuadrado; ya que el ángulo en el vértice del octógono no es un submúltiplo de 360°.

Las particiones del plano efectuadas con un solo tipo de polígonos regulares se llaman mosaicos regulares; aquellas afectuadas con dos o más tipos de polígonos regulares se llaman mosaicos semirregulares (1). En las siguientes figuras pueden observarse varios mosaicos semirregulares.

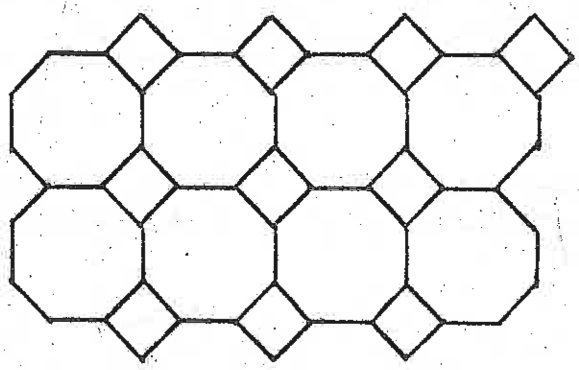


Fig. 2. Partición del plano en octógonos y cuadrados.

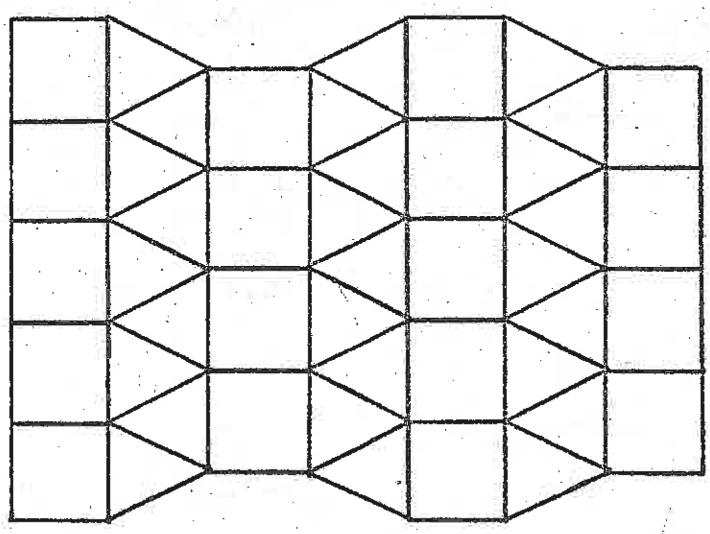


Fig. 3. Partición del plano en triángulos y cuadrados.

(1) Gardner, Martín. Nuevos pasatiempos matemáticos. (Madrid: Alianza Editorial, 1972), pág. 263.

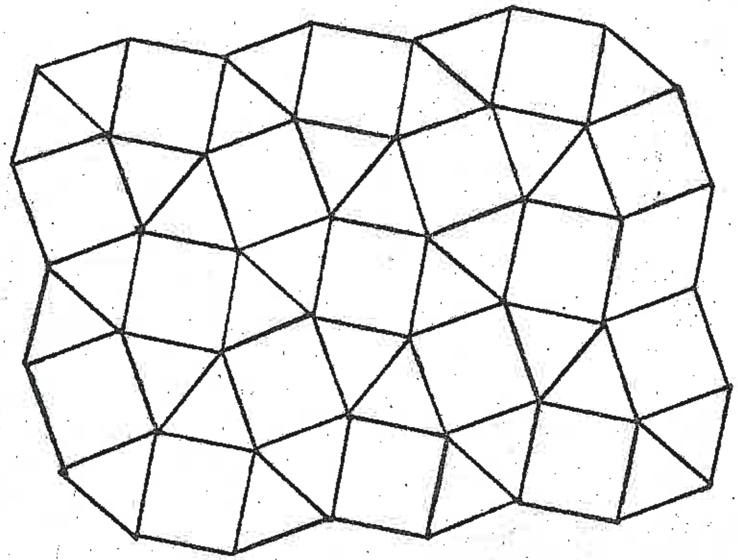


Fig. 4. Variante de la partición del plano en triángulos y cuadrados de la figura anterior, (3).

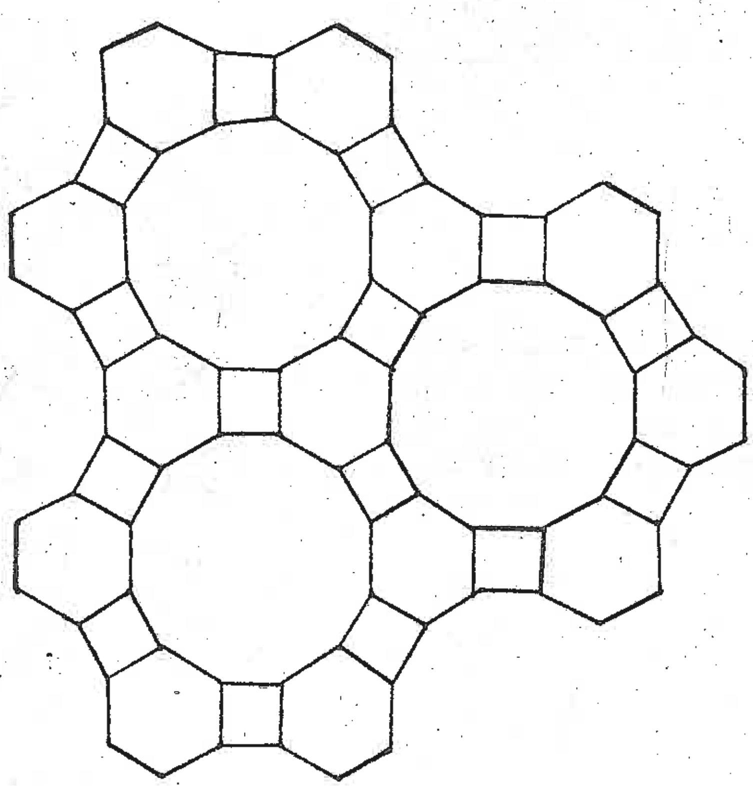
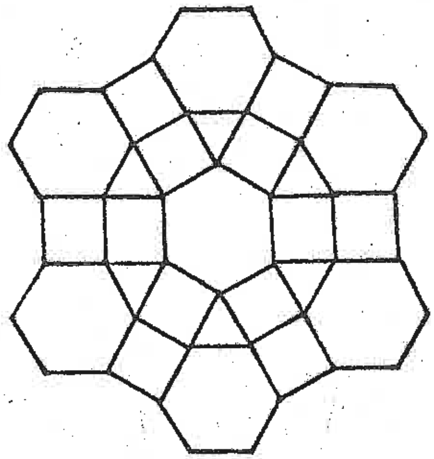
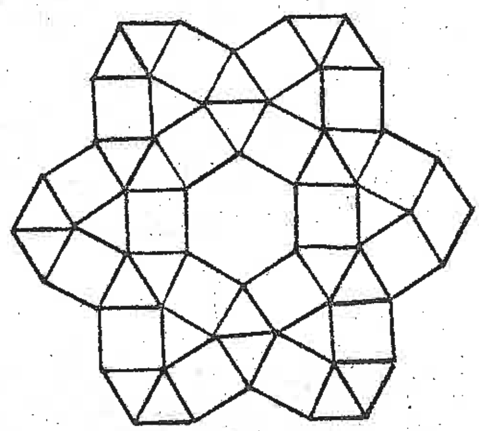


Fig. 5. Partición del plano en dodecágonos, exágonos y cuadrados.





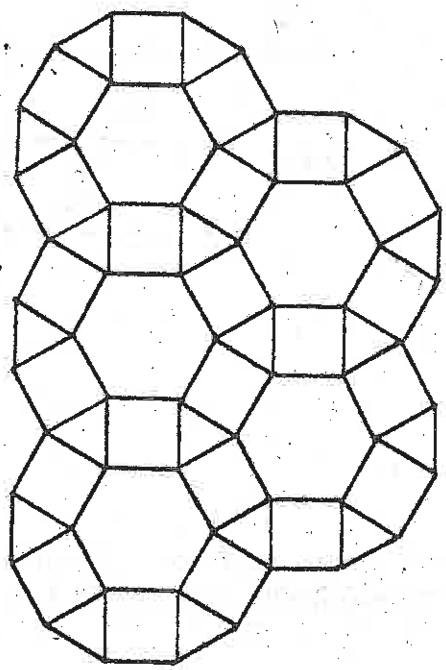
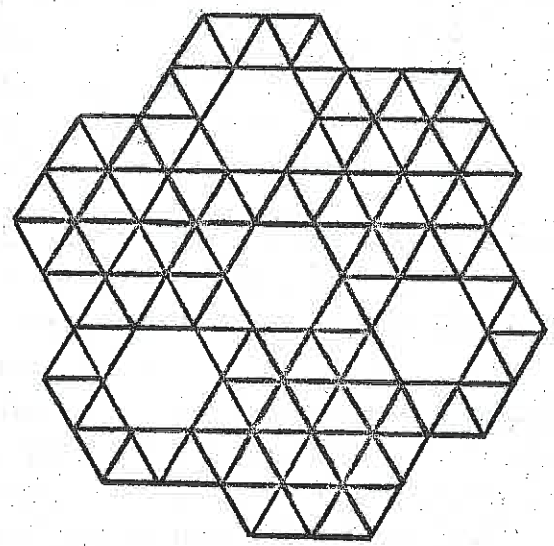


Fig. 6. Tres particiones del plano por medio de cuadrados, triángulos equiláteros y exágonos regulares.



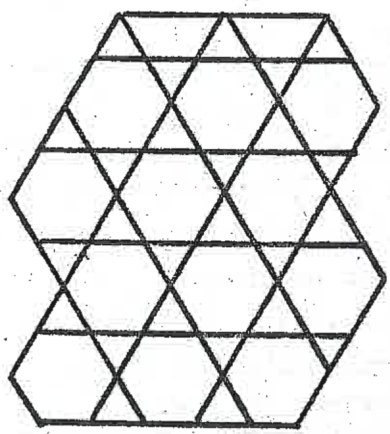


Fig. 7. Dos particiones del plano por medio de triángulos equiláteros y exágonos regulares.

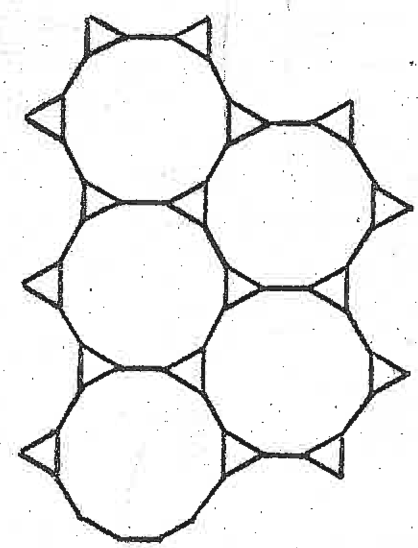


Fig. 8. Partición en dodecágonos y triangulos equiláteros.

El problema que hay que resolver puede anunciarse de la siguiente manera: Dado un punto P en el plano, construír un conjunto de ángulos en el plano tales que:

i. Cada ángulo tenga su vértice en P.
ii. Cada ángulo sea ángulo interior de algún polígono. (De ahora en adelante polígono significará polígono regular)
iii. Si un punto del plano no está en ninguno de los ángulos está en el interior de alguno de los ángulos.
iv. Los interiores de los ángulos construídos son disjuntos dos a dos. (2).

Una construcción de este tipo se llama <u>teselación</u> alrededor del punto P; o sea que una teselación es una partición del plano por medio de polígonos regulares. (3).

Los ángulos que hay que construír en un punto P deben sumar 360° y necesitamos un mínimo de tres ángulos pues ningún polígono tiene ángulo interior que mida mas de 180°. El problema se reduce pues a hallar todos los conjuntos finitos de ángulos que cumplan las siguientes condiciones:

i. Cada ángulo pertenece a un polígono regular.
ii. La suma de las medidas de los ángulos en cada conjunto es 360°.

Para resolver este problema es necesario medir los ángulos de los diferentes polígonos regulares. La siguiente tabla contiene estas medidas. (El teorema que le sigue explica por qué la tabla termina en el 42-gono).

n-gono	Medida del ángulo interior	n-gono	Medida del ángulo interior
3	60	10	144
4	90	11	147 3/11
5	108	12	150
6	120	13	152 4/13
7	128 4/7	14	154 2/7
8	135	15	156
9	140	16	157 1/2

(2) Ducan, David R. y Litwiller, Bonnie. "A simple sorting sequence". <u>Mathematics Teacher, Vol</u> , número Nueva York (Abril, 1974), pág. 311.

(3) Ibid.

n-gono	Medida del ángulo interior	n-gono	Medida del ángulo interior
17	158 14/17	30	168
18	160	31	168 12/31
19	161 1/19	32	168 3/4
20	162	33	169 1/11
21	162 6/7	34	169 7/17
22	163 7/11	35	169 5/7
23	164 8/23	36	170
24	165	37	170 10/37
25	165 3/5	38	170 10/19
26	166 2/13	39	170 10/13
27	166 2/3	40	171
28	167 1/7	41	171 9/41
29	167 17/29	42	171 3/7

Teorema 1: No existe ninguna teselación alrededor de un punto P construído con un ángulo de un polígono de más de 42 lados.

Demostración: Supongamos que existe una teselación alrededor de un punto P con un ángulo A que pertenece a algún polígono de más de 42 lados. Como el ángulo interior del polígono de 42 lados mide 171 3/7, la medida de A debe ser mayor de 171 3/7. Entonces para que la suma total sea 360°; la suma de las medidas de los demás ángulos de P debe estar entre 180° y 188 4/7° (excluídos los extremos).

Sea B otro ángulo de la teselación.

Caso 1. Si mB=60 (por mB notaremos la medida del ángulo B), entonces la medida total de los ángulos diferentes a A y B debe estar entre 120 y 128 4/7. Pero de la tabla concluímos que no es posible hacer ninguna combinación de ángulos cuya suma dé algún valor entre 120 y 128 4/7. Entonces: $mB \neq 60$.

Caso 2. Si mB=90, la suma de las medidas de los ángulos diferentes de A y de B está entre 90 y 98 4/7. En la tabla no se encuentra ninguna medida comprendida entre estos dos valores. Se concluye que $mB \neq 90$.

Caso 3. Si mB=108, las medidas de los ángulos diferentes de A y de B deben sumar entre 72 y 80 4/7. Nuevamente la tabla muestra que esto es imposible.
Luego $mB \neq 108$.

Caso 4. Si mB=120, las medidas de los ángulos diferentes de A y de B deben sumar entre 60 y 68 4/7. Pero esto es imposible y $mB \neq 120$.

Caso 5. Si mB 128 4/7, la suma de las medidas de los ángulos diferentes de A y de B debe ser menor que 60. Como esto es imposible concluímos que mB no puede ser mayor o igual a 128 4/7.

Hemos descartado todas las posibles medidas del ángulo B. Se concluye que no existe ninguna teselación con un ángulo de algún polígono de más de 42 lados.

Teorema 2: Si la suma de las medidas de dos o más ángulos de una teselación alrededor de un punto P es menor de 216°, entonces, al menos un ángulo debe ser ángulo de un triángulo equilátero o de un cuadrado.

Demostración: Si de la tabla sacamos los ángulos del triángulo equilátero (60°) y del cuadrado (90°), solamente quedan ángulos de medida mayor o igual a 108°. Evidentemente la suma de dos o más de estos ángulos no puede ser menor de 216°.

Teorema 3: Por lo menos uno de los ángulos de una teselación alrededor de un punto P es un ángulo de algún polígono de seis o menos lados (4). La demostración es similar a la del teorema 1.

Teselaciones en la historia del arte.

Las teselaciones en el arte nacieron con los mosaicos, revestimientos formados por pequeñas piezas de vidrio o azulejo de forma y color vario, con las que pueden trazarse ricos dibujos decorativos. Famosas por sus mosaicos son ciertas arquitecturas como la persa, la romana, la islámica y, sobre todo, la bizantina (5). Sin embargo nos ocuparemos exclusivamente de los mosaicos islámicos ya que las características de la cultura islámica impulsaron ampliamente el desarrollo de este arte. Veamos dos de estas características. En estos países meridionales hace un tremendo calor y como a los fieles sólo se les dejaba entrar en las mezquitas después de haberse despojado de sus zapatos o sandalias, les

---

(4) Duncan y Litwiller, págs. 312-315.

(5) Gil Tovar, F. Principios y elementos de las artes plásticas. (Bogotá: Ediciones Paulinas, 1970), pág. 53.

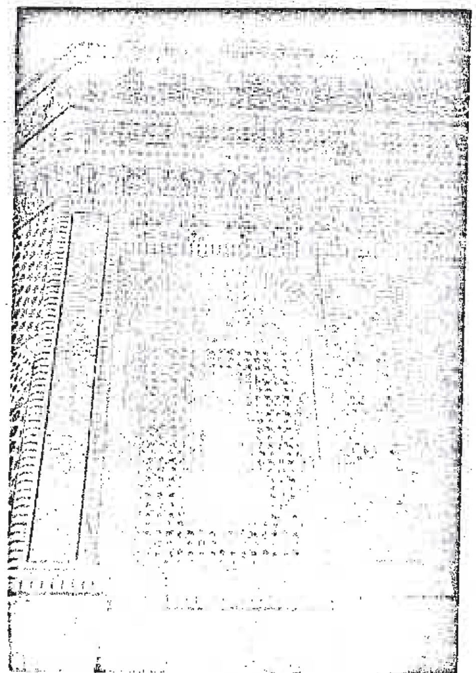
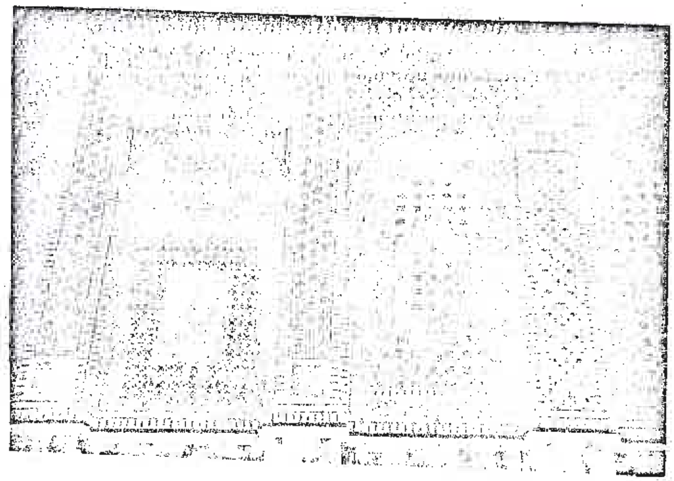


Fig. 9. Mosaico islámico, teselaciones superpuestas, en la mezquita de Omar (conocida también como Domo de la Roca) en Jerusalem.



agradaba caminar sobre azulejos bien vidriados. Para que las mezquitas estuvieran profusamente adornadas de ellos, a los ladrilleros se les permitió dar rienda suelta a su imaginación (6). No había una ley que prohibiese "la construcción de imágenes a algo que se pareciera a cosas que se encuentran en el cielo, sobre nosotros; o en la tierra, debajo del cielo; o en el agua, más baja que la tierra"; pero contra todo esto existía un marcado prejuicio que impedía al pintor de retratos ejercer su arte. (8). Sólo podía

(6) Van Loon, Hendrik Willem. <u>Las Artes</u>. (Barcelona: Editorial Luis Miracle, 1950), pág. 184.

(8) En Siria en el siglo IV, apareció por primera vez la creencia de que la representación artística de la forma santa o divina era anatema, idea que luego afectaría a todo el Islam y dominaría el mundo bizantino durante el período que denominamos iconoclasta (726-843).

ejercitarse con algunos adornos con los cuales romper la monotonía de las paredes del templo (7). Surgieron así las teselaciones superpuestas; la formada por la yuxtaposición de las piezas, generalmente rectangulares, de azulejo; y otra pintada sobre los azulejos y formada por repeticiones de figuras geométricas.

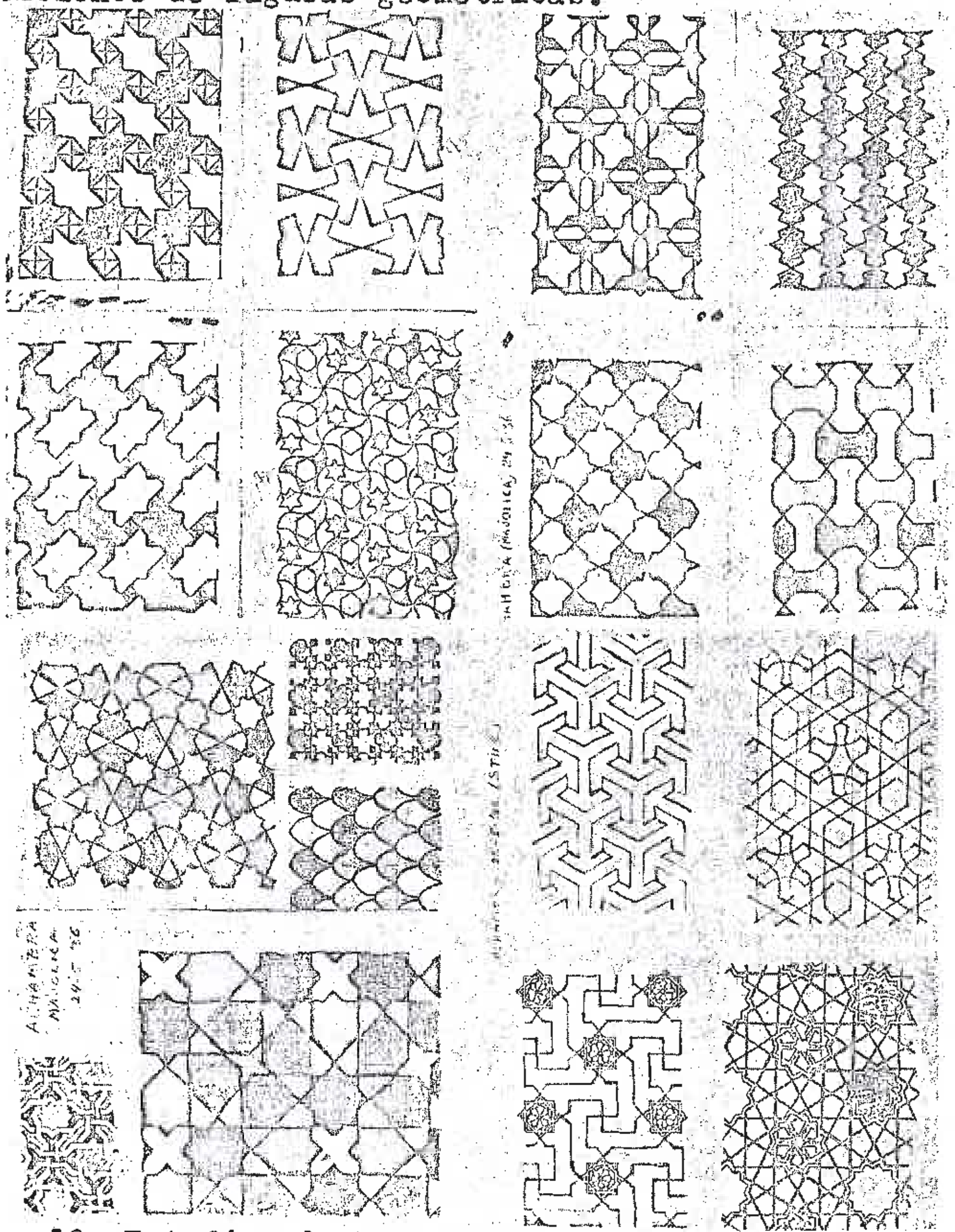


Fig. 10. Estudios de los mosaicos de la Alhambra, realizados por el pintor holandés M.C. Escher (1898-1972).

(7) Op. Cit., pág. 183.

Las teselaciones, como lo muestran los ejemplos siguien
tes, han estado presentes en el arte de todas las culturas.

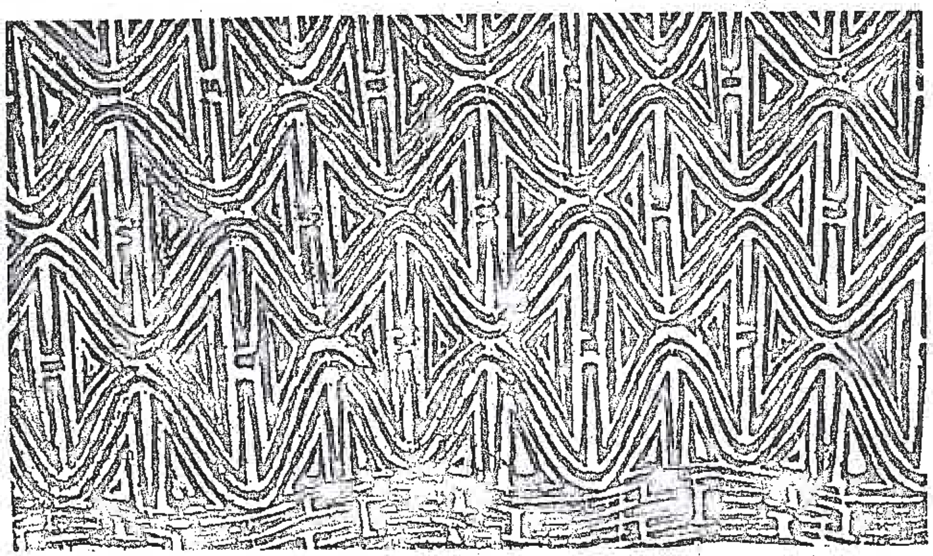
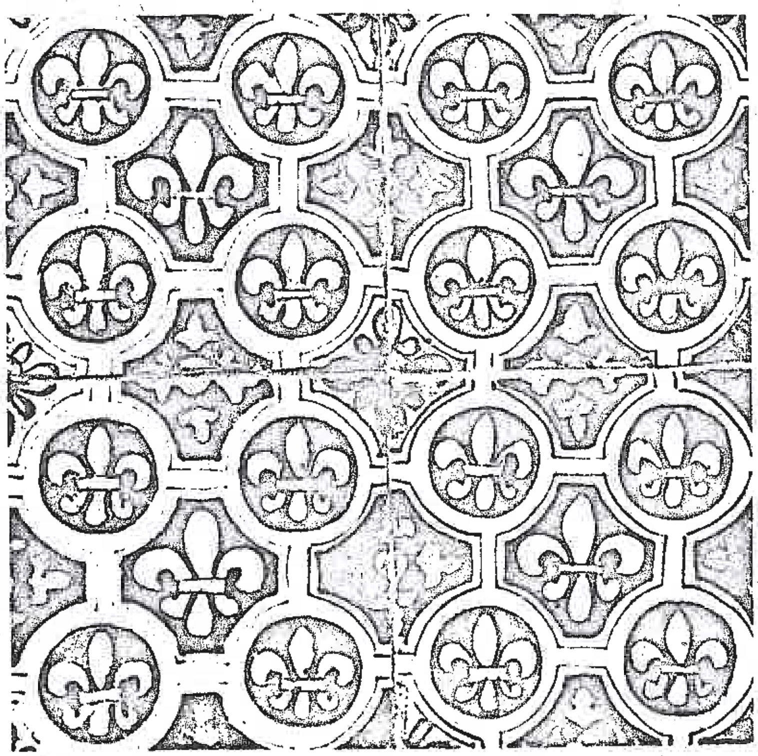


Fig. 11. Tela estampada de Nueva Guinea.



Figu. 12. Azulejos de Delft, siglo XVII.

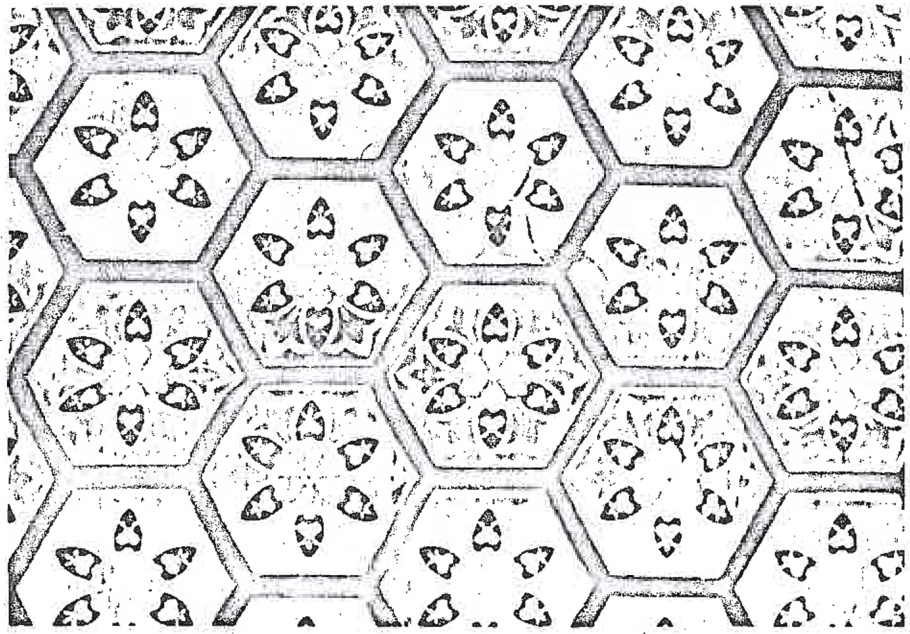


Fig. 13. Seda japonesa estampada, siglo XVIII.

El maestro contemporáneo de las teselaciones es el pintor holandés Maurits Cornelis Escher (1898-1972).

La característica principal de sus teselaciones es la ambiguedad visual acompañada de la ambiguedad de contenido: El día se convierte en noche, los peces se metamorfosean en palomas, el cielo se vuelve agua.

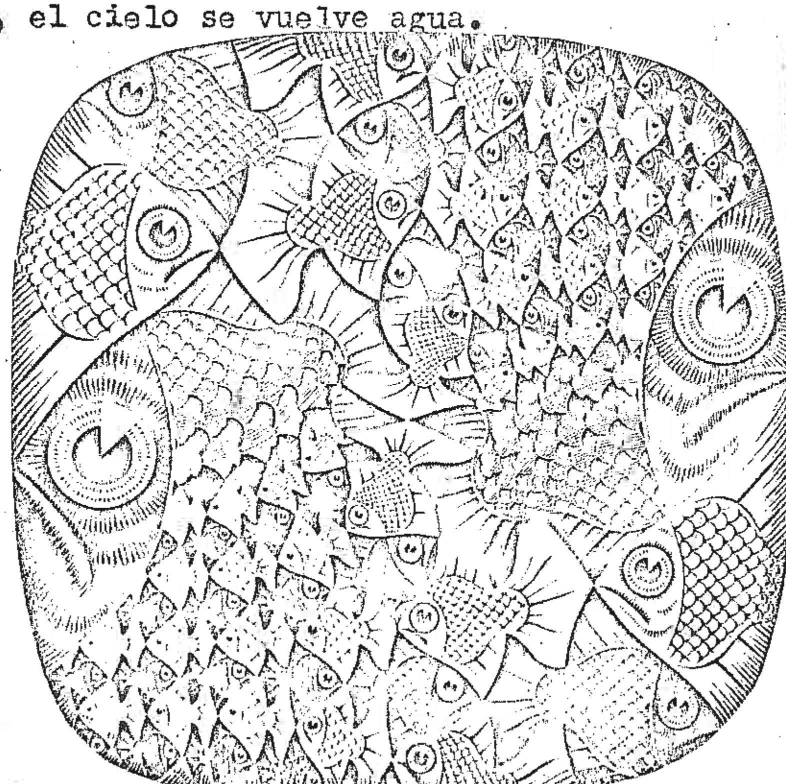


Fig. 14 "Peces", grabado de M.C. Escher.

En 1922 ya aparecían teselaciones en los trabajos de Escher, sin embargo fué en 1930 cuando redescubrió el estilo que lo hizo famoso. Los grabados "Desarroll 1" ", Día y Noche" y "Cielo y Agua" datan de este período.

Se ha concluído que Escher debía estar familiarizado con los experimentos sobre la relación fondo-figura llevados a cabo por el psicólogo danés Edgar Rubin hacia 1915 (9). Edgar Rubin estudió formas que se percibían viaualmente como función de la relación entre la figura y el fondo. El modelo mas conocido de Rubin es el que aparece en la figura 15; puede ser visto como una copa blanca sobre fondo negro o como dos perfiles negros sobre fondo blanco; pero nunca, afirma Rubin, podemos ver ambas figuras simultáneamente. (10).

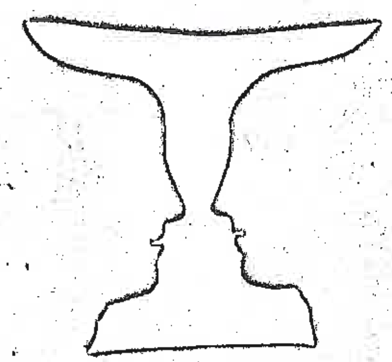


Fig. 15

En 1922, cuando Escher terminaba sus estudios en la Escuela de Arquitectura y Diseño de Haarlem, realizó un trabajo titulado "Ocho Cabezas" (Fig. 16). Cada cabeza se acomoda exactamente en el espacio dejado por las cabezas vecinas y actúa alteradamente como figura y fondo según la actitud del observador.

Se nota fácilmente el lazo existente con los trabajos de Rubin cuando Escher clasifica "Día y Noche", "Ocho Cabezas" y "Cielo y Agua 1" bajo el título de "La Función de las Figuras como Fondo", Escher comenta: "Nuestros ojos están acostumbrados a fijarse en un objeto específico. Cuando esto sucede todo lo que está alrededor se convierte en fondo" (11).

---

(9) Teuber, Marianne L. "Sources of Ambiguity in the Prints of Maurits C, Escher". Scientific American. Vol. 231, número 1, Nueva York (Julio 1974) pág. 90.

(10) Ibid.

(11) Op. Cit., pág. 91.

En 1923 Escher dejó su tierra y viajó a Italia en donde vivió hasta 1934. Hizo, allí, gran cantidad de graba-

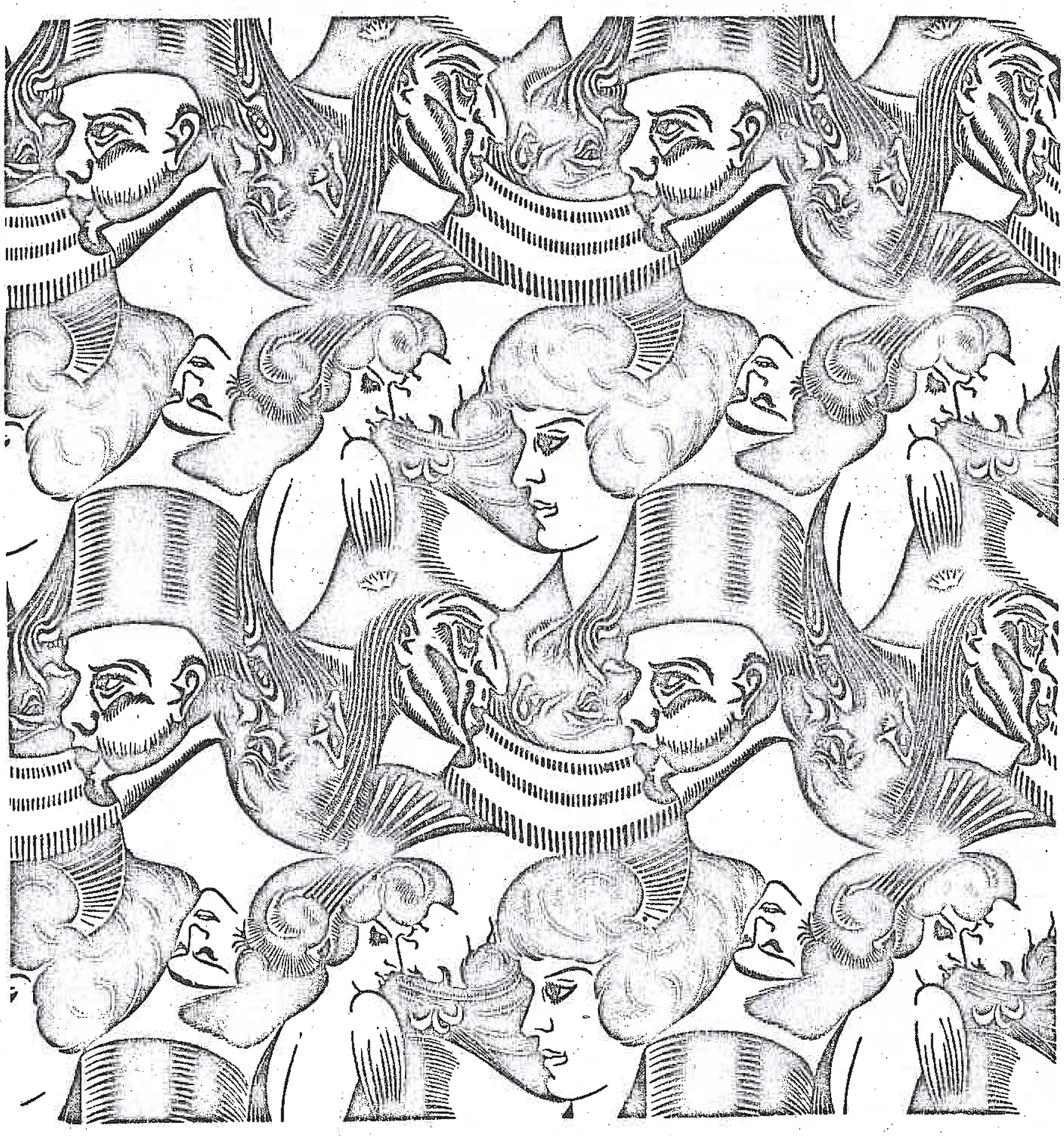


Fig. 16. Ocho Cabezas (1922).

dos y litografías representando paisajes y construcciones arquitectónicas pero dejó casi completamente las teselaciones; solamente en 1926 hizo una serie de grabados con animales intercalados en forma de teselación. Escher dice que su viaje a Italia fué el responsable de su cambio de estilo: el paisaje del Norte no lo atraía como lo hacía el paisaje de Italia, es por esto que cuando trabajaba en Holanda prefería concentrarse en ideas personales, en visiones interiores. (12).

En 1936, en un viaje a España, se interesó y copió los mosaicos de la Alhambra, que con sus cualidades de encajamiento y variación en la relación fondo-figura le recordaron sus anteriores grabados con teselaciones.

Desde el año siguiente, Escher recomenzó a trabajar con teselaciones; pero su estilo plano lo trasformó en figuras tridimensionales. Ejemplo de este período es "Metamorfosis 1" en el cual una ciudad entera se convierte en cubos tridimensionales que se desvanecen imperceptiblemente hasta transformarse en figuras planas que dan origen a una figura chinesca (Fig. 17).

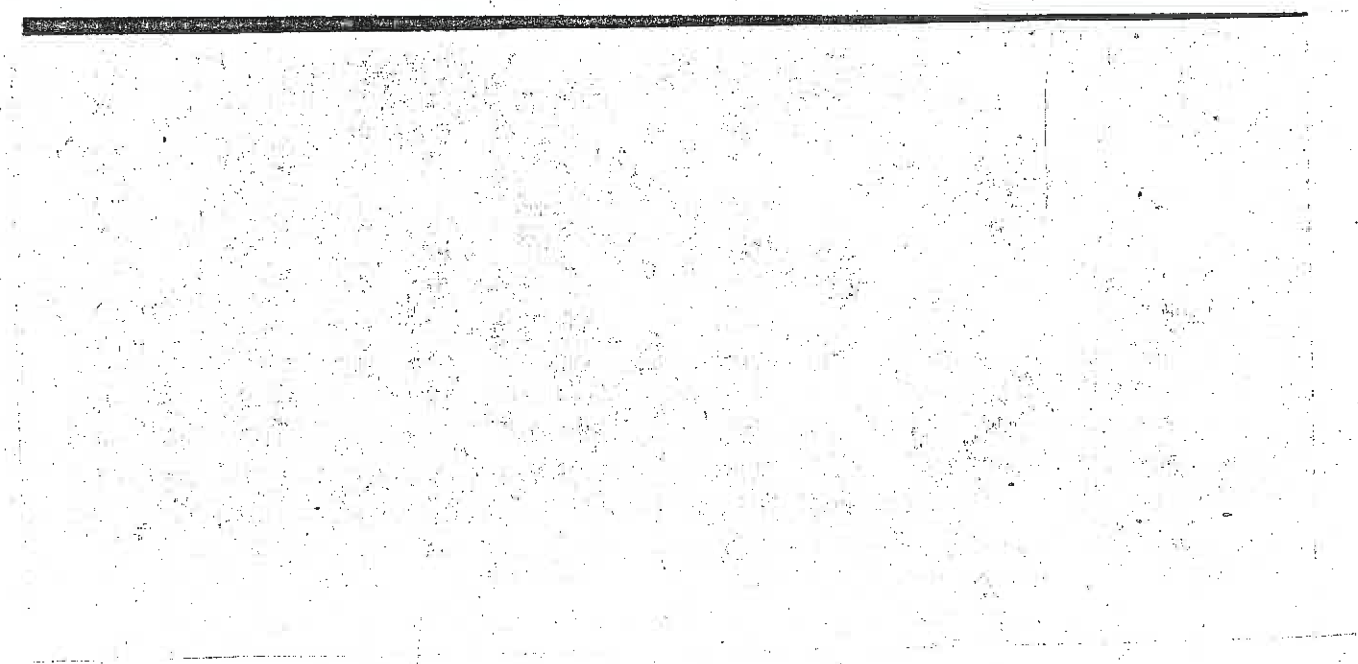


Fig. 17. Metamorfosis 1 (1937).

(12) Op. Cit., pág. 93.

Este nuevo interés ha sido atribuído a la publicación de la obra de Koffka "Principios de Psicología Gestalt". Koffka demuestra la identificación entre organizaciones tridimensionales y líneas y planos bidimensionales que existe bajo ciertas condiciones. El muestra, entre otros ejemplos, como un exágono, dependiendo de la organización de las líneas puede dejar de ser bidimensional y convertirse en un cubo (Fig.17).

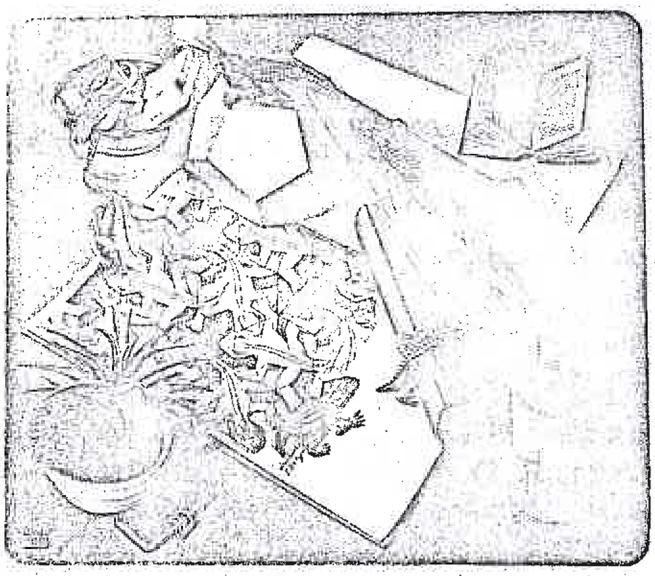


Fig. 18. "Reptiles".

Muchas de las obras posteriores de Escher están basadas en la transformación del plano en espacio tridimensional; tal es el caso de "Reptiles" (1943), (Fig. 18) litografía en la que vemos unos reptiles que liberándose del plano den un corto paseo por el espacio tridimensional y vuelven a quedar atrapados en el plano nuevamente. Durante el paseo por el espacio tridimensional pasan sobre una serie de objetos (uno de los cuales es un sólido Platónico: el dodecaedro) dibujados en un estilo bastante mágico.

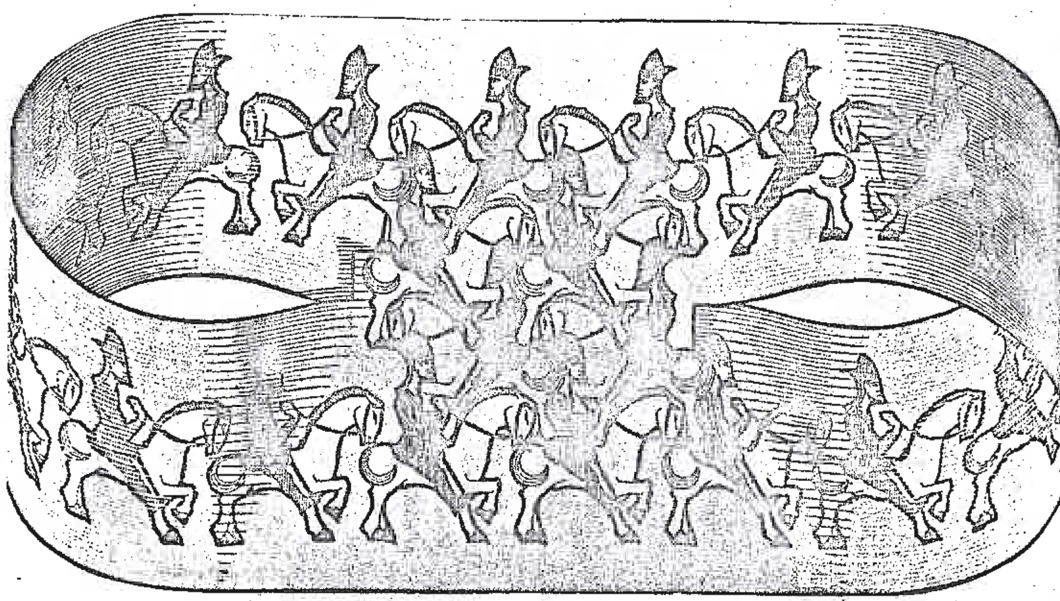


Fig. 19. "Caballeros", 1946. Teselaciones en una banda de Moebius.

Durante el mismo período (1936-1938) Escher conoció los resultados de los experimentos de Harrower, quien en 1936 publie-o en el British Journal of Psychology un artículo titulado "Algunos factores que determinan la Articulación Fondo-Figura" (13). El trabajo de Harrower era una variación de los modelos de Rubin; consistía en una serie de tarjetas con el diseño perfiles-copa; pero en unas de las tarjetas enfatizaba el delineamiento de la copa y dejaba los perfiles convertirse en fondo, en la tarjeta del medio las dos figuras equivalentes y en otras tarjetas enfatizaba los perfiles, dejando la copa como fondo. Lo que Harrower quería demostrar era que al variar la intensidad de los grises en los perfiles y en la copa se producía una variación en la percepción de las figuras.

En 1938 Escher, de acuerdo a los principios de Harrower, hizo dos de sus grabados mas impactantes "Cielo y Agua" (Fig. 20) y "Día y Noche" (Fig. 21). En estos dos grabados el fondo se convierte lentamente en figuras y las figuras en fondo; y por ejemplo en "Cielo y Agua" vemos que en la

(13) Op. Cit., pág. 94.

zona central horizontal los peces son equivalentes a las palomas.

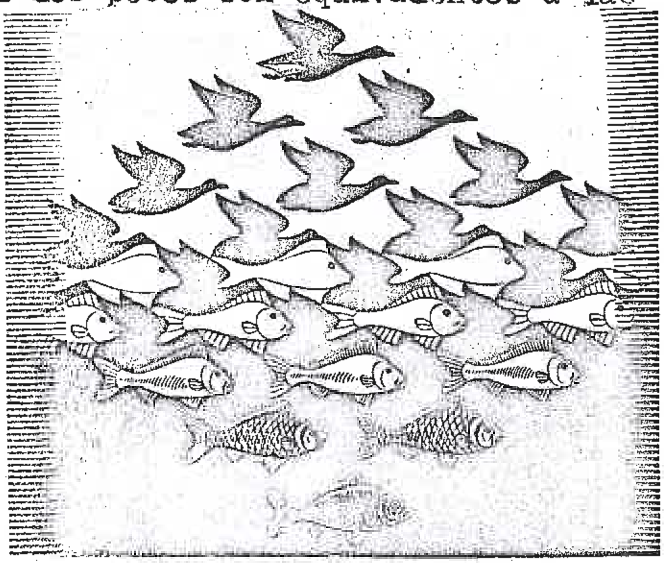


Fig. 20."Cielo y agua".

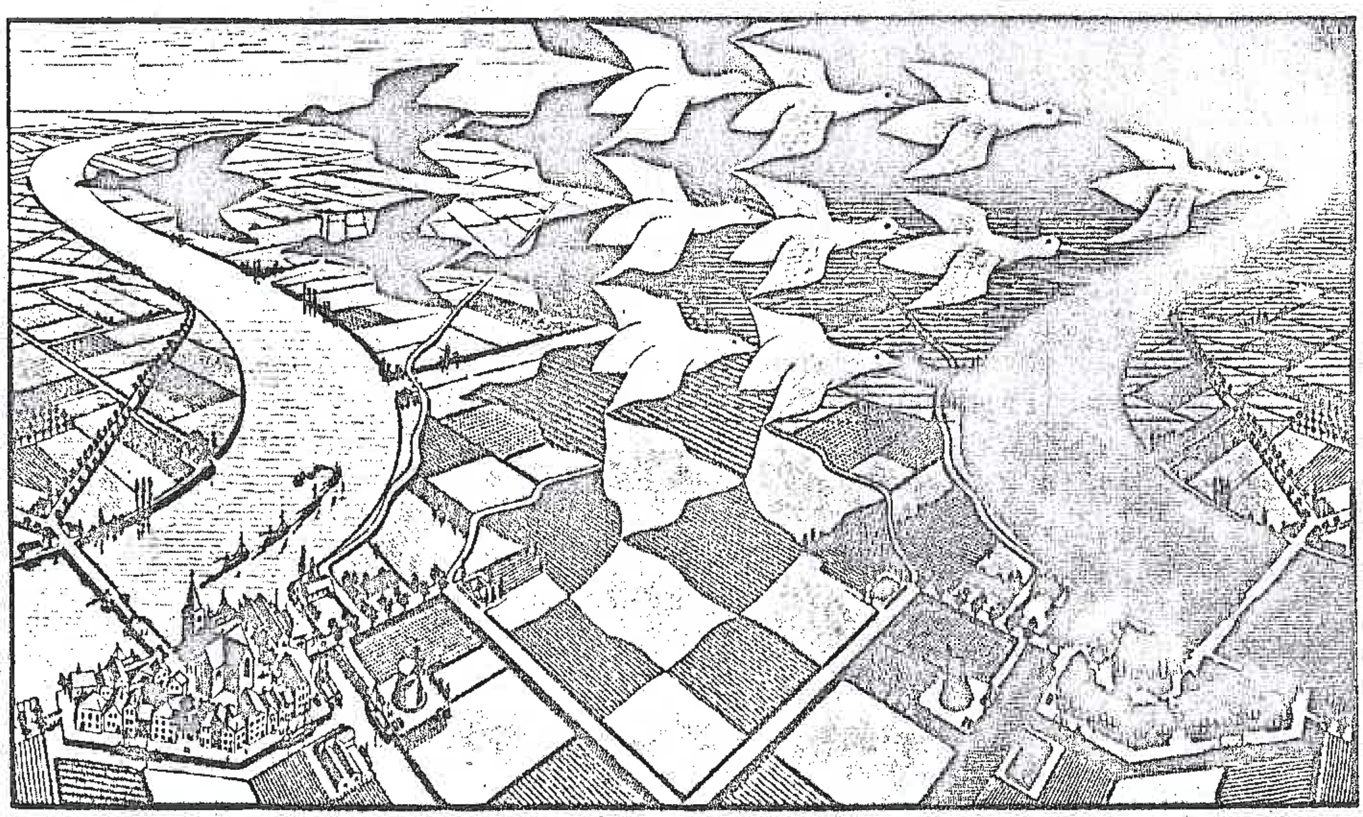


Fig. 21. Día y Noche.

Otros de los grabados de este período son Desarrollo I y Liberación. En 'Desarrollo I", vemos como cuadrados en gris suave van ganando contraste hasta convertirse en dos reptiles blancos y dos negros en el centro. (Fig. 22). En "Liberación" (Fig. 23). Escher nos presenta una situación

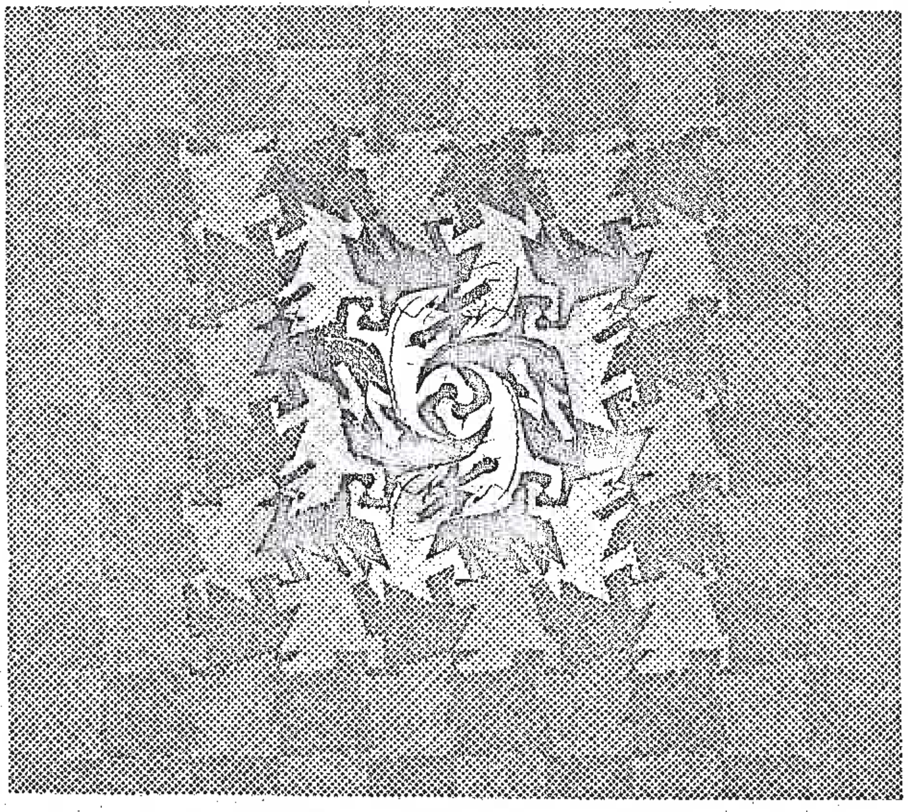


Fig. 22. "Desarrollo I"

ambigua; los pájaros que se liberan del rollo de papel gris son atrapados, sin embargo, sobre la superficie sobre la cual se imprime la litografía.

Los estudios de la psicología Gestalt sobre el problema fondo-figura no fueron la única fuente de inspiración de las teselaciones de Escher; él también aplicó los principios del empacamiento periódico de cristales. En los trabajos de Escher, al igual que en los mosaicos de la Alhambra, se encuentran muchos de los diez y siete grupos cristalográficos de estructuras simétricas.

Experimentando con teselaciones en superficies planas, Escher obtuvo complicadas composiciones que seguían reglas cristalográficas de transformación; un buen ejemplo es su grabado "Cisnes" (Fig. 24) en el cual él admite haber utilizado "los tres principios fundamentales de cristalografía", que en las propias palabras de Escher son: traslados

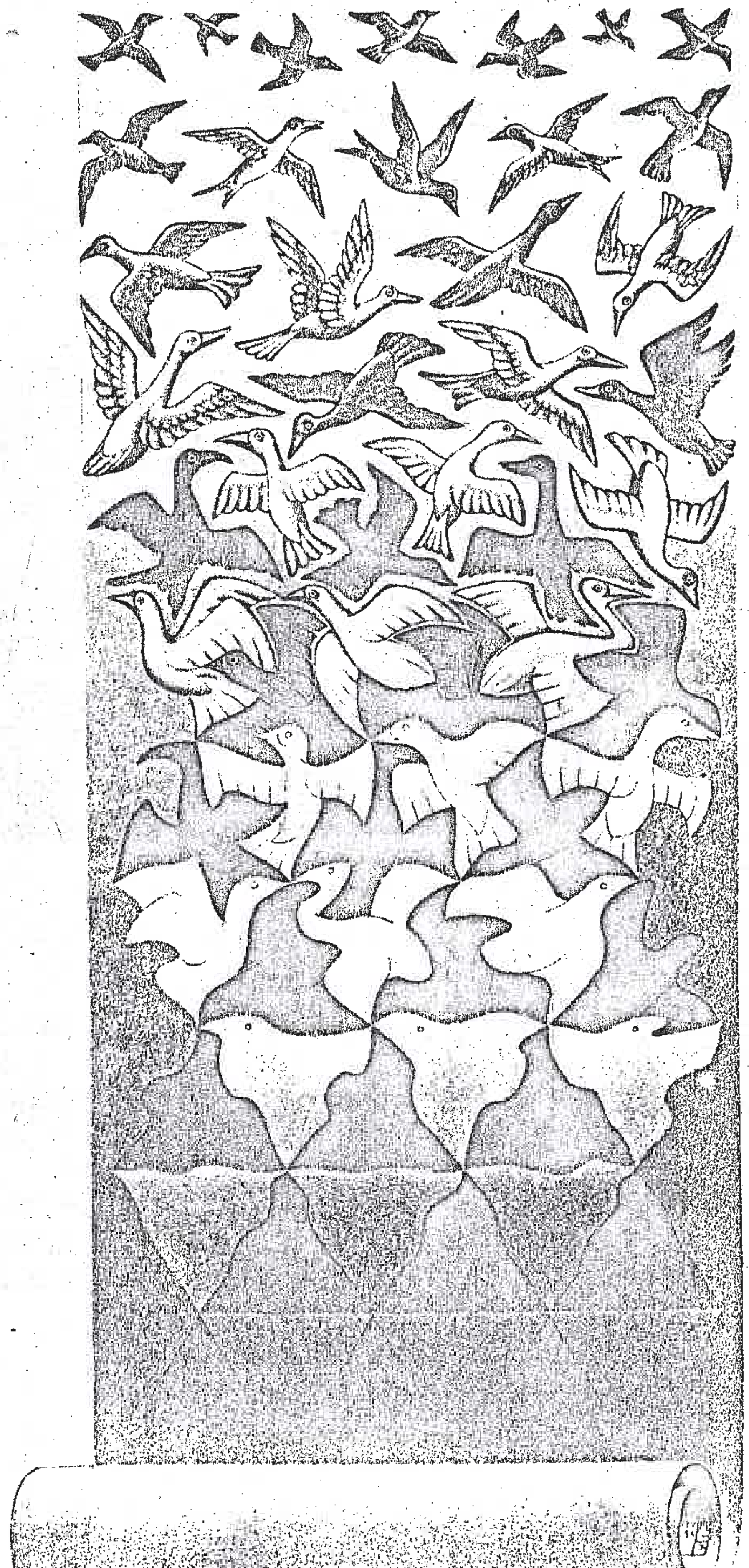


Fig. 23. "Liberación", 1955.

continuos (traslaciones), rotaciones alrededor de ejes e imágenes reflejadas por espejos (reflexión).

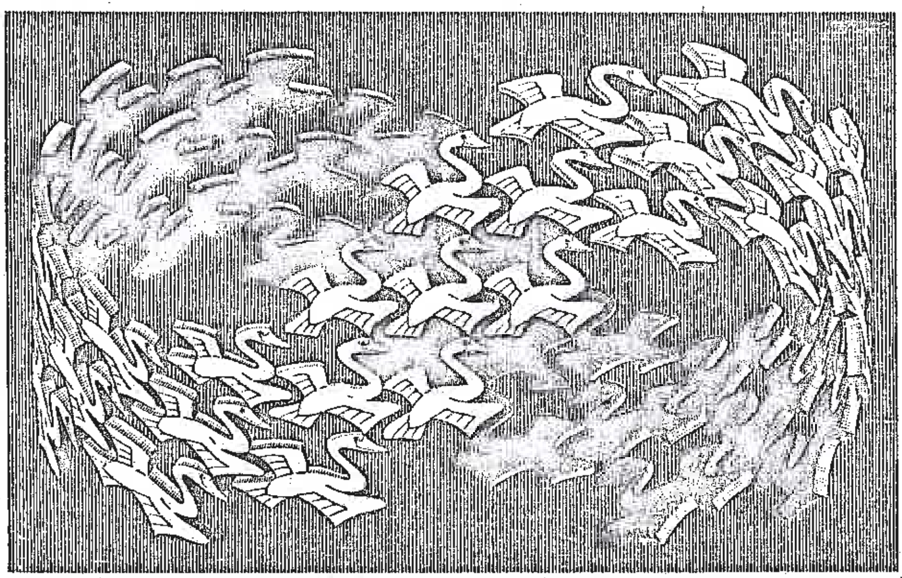


Fig. 24. "Cisnes", 1956.

<u>Como hacer teselaciones del tipo Escher</u>. (14).

Procedimiento:

i. Sean A,B,C,D y N puntos tales que ANB es una línea recta; el ángulo ANC y el ángulo NCD son ángulos rectos; AN NB, CD AB.

ii. Sea S una curva contínua que conecta A y N como se muestra en la figura a.

iii. Refleje S sobre la línea AN (b). Sea S´ la reflexión de S.

iv. "Deslice" S´ a lo largo de AN hacia B, una distancia -

---

(14) Teters, Joseph L. "How to draw tessellations of the Escher type". <u>Mathematics Teacher</u>. <u>Vol.</u> , número , Nueva York (Abril, 1974) págs. 307-309.

igual a AN (c). Sea S'' la curva S' en esta posición. Sea la combinación de las dos curvas S y S'' notada S1.

v. Dibuje la perpendicular LM a NC por el punto medio de NC. Refleje S1 sobre la línea LM. Notemos esta reflexión de S1 por S1'. (d).

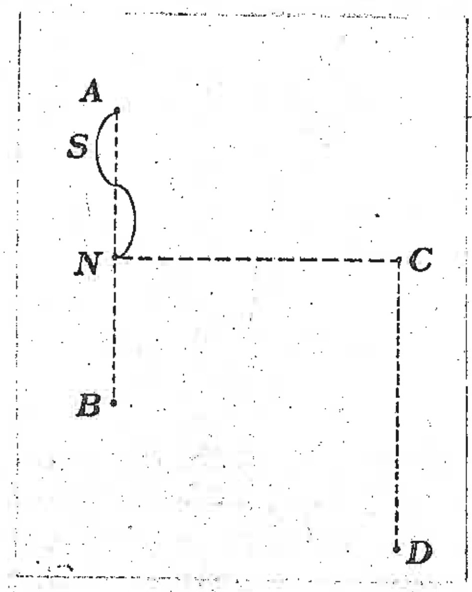


Fig. 25- a

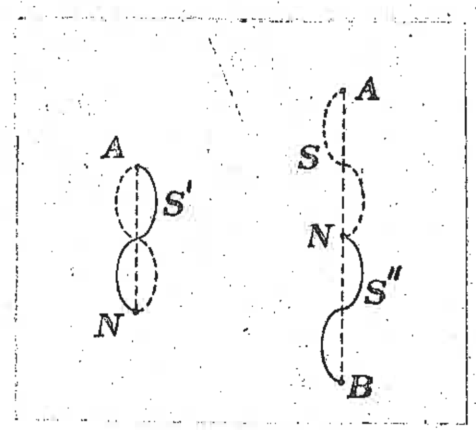


Fig. 25 b, c.

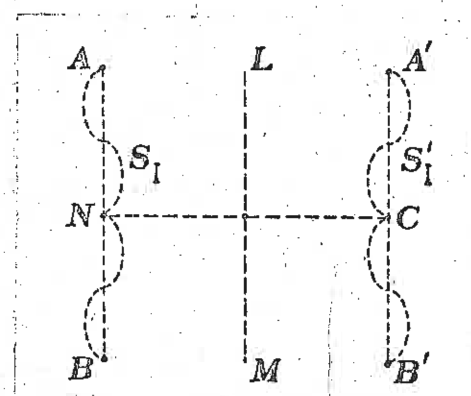


Fig. 25 d.

vi. "Deslice" S1' hacia D a lo largo de la línea CD una distancia igual a AN. Notemos esta nueva posición de S1' por S11. (e).

vii. Sea T la curva contínua que conecta A y C como se muestra en la figura (f).

viii. "Deslice" T hácia abajo una distancia AB, de tal manera que cada punto de T se mueva paralelamente a AB y a CD. Notemos esta nueva posición de T por R. (f).

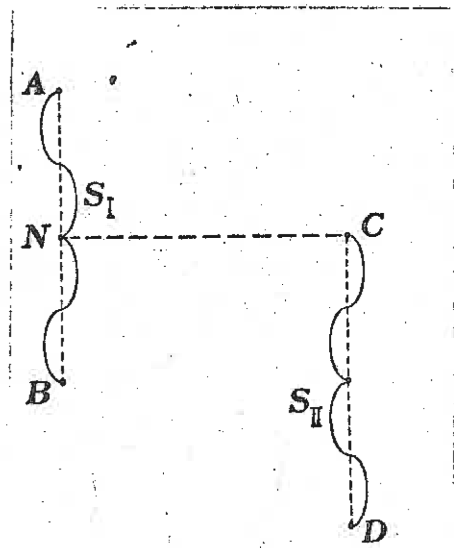


Fig. 25 - e

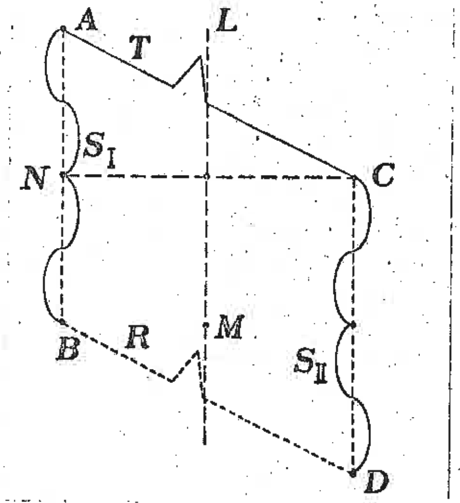


Fig. 25 - f

ix. Dividida la región encerrada por S1, S11, T y R en dos partes congruentes. Esto puede hacerse reflejando T sobre la línea LM. Esta reflexión de T llamémola T' (g).

x "Deslice" T' hacia B, una distancia NB, de tal manera que cada punto de T' se mueva paralelamente a AB y a CD. Representemos esta posición final de T' por P.

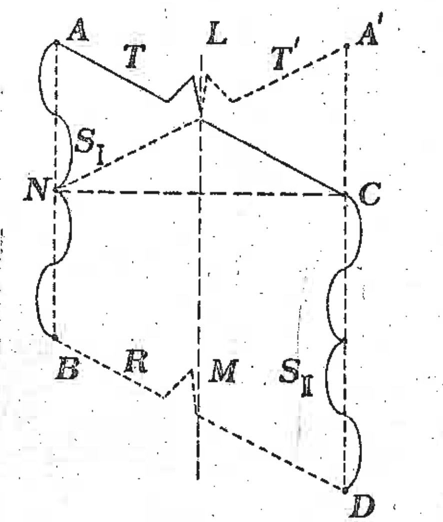


Fig. 25 - g

Las regiones así obtenidas pueden utilizarse para formar teselaciones similares a las de Escher. (h)

De la misma manera, las curvas que se muestran en la figura i y las regiones fundamentales completadas de la figura j dan las teselaciones (con algunas adiciones apropiadas) que se muestran en la figura k.

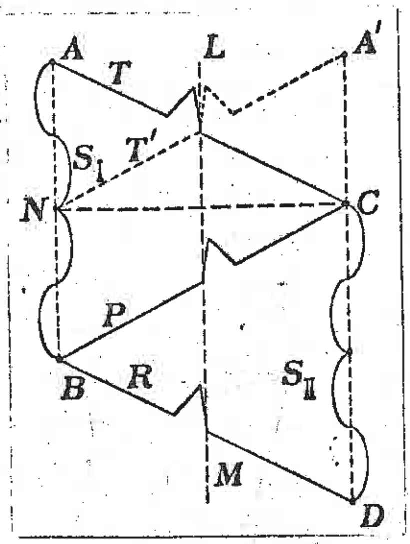


Fig. 25 - h

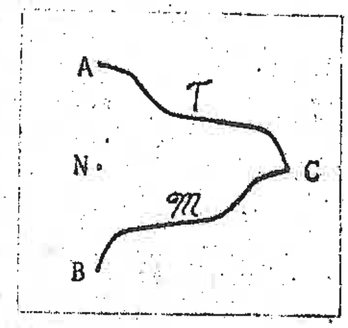


Fig. 25 - i

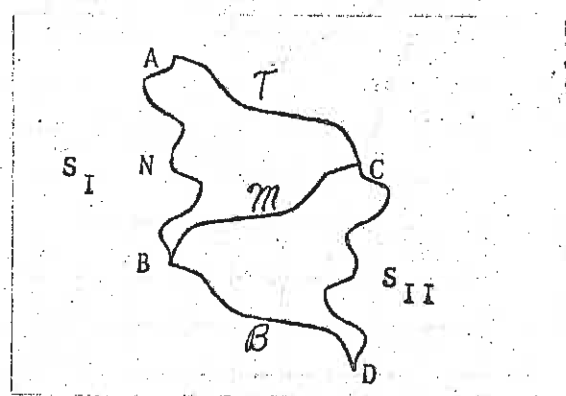


Fig. 25 - j

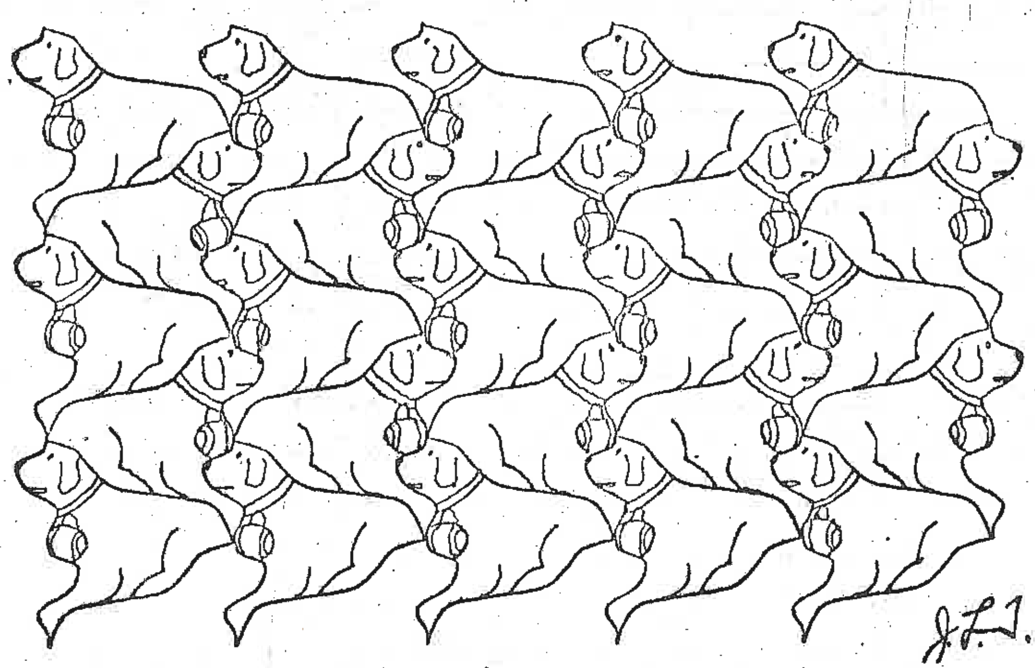


Fig. 25 - k

Como hacer teselaciones con formas geométricas equiláteras.

1. Con triángulos.

Triángulos congruentes de cualquier forma pueden usarse para construír una teselación. Pueden ser colocados uno al lado del otro hasta cubrir una superficie sin ninguna superposición y sin dejar ningún espacio descubierto. (Fig. 26).

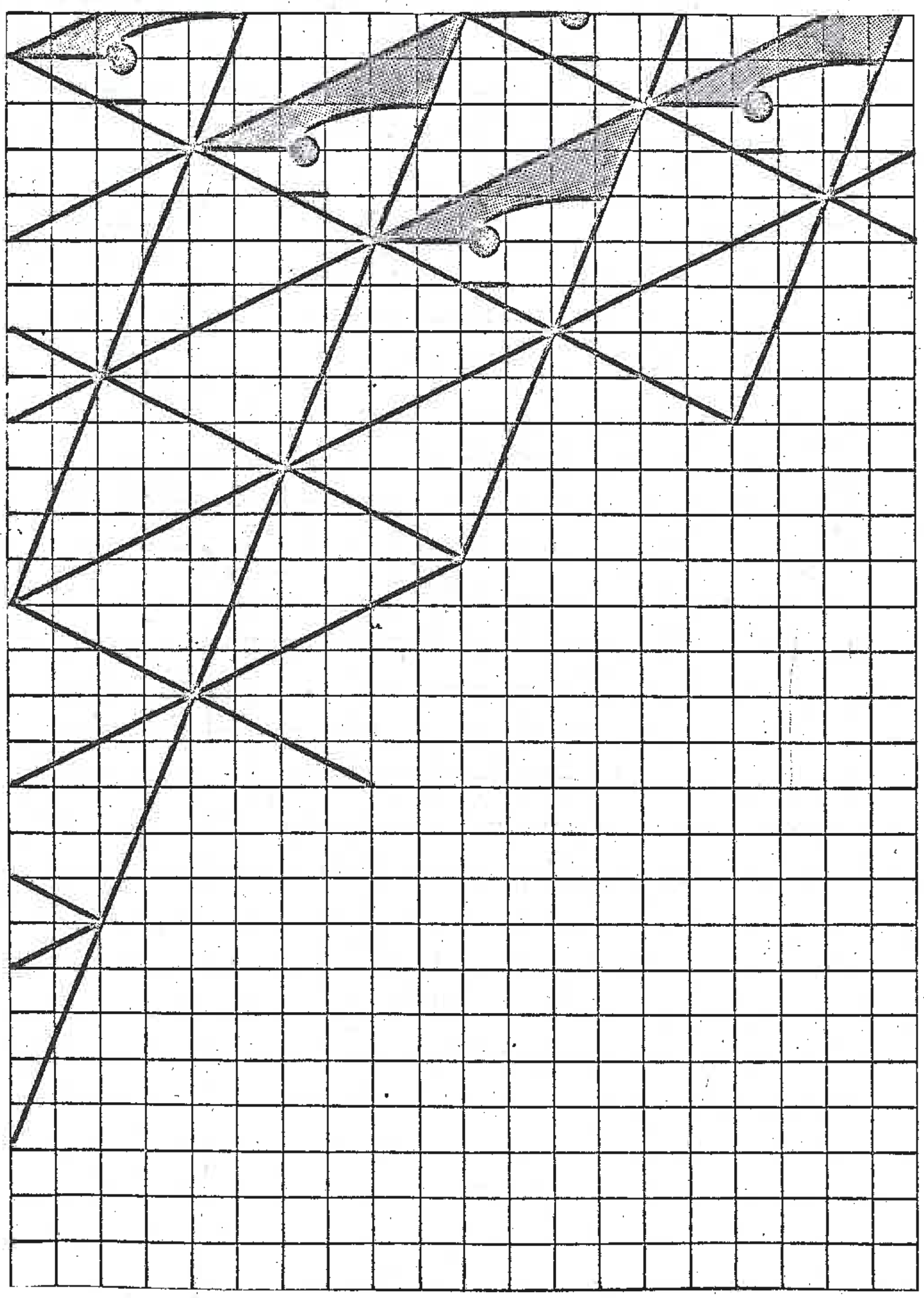


Fig. 26.

Paso 1: Se cubre el cuadriculado con triángulos congruentes del mismo tamaño.

Paso 2: Se completa la teselación dibujando el diseño en triángulos alternos.

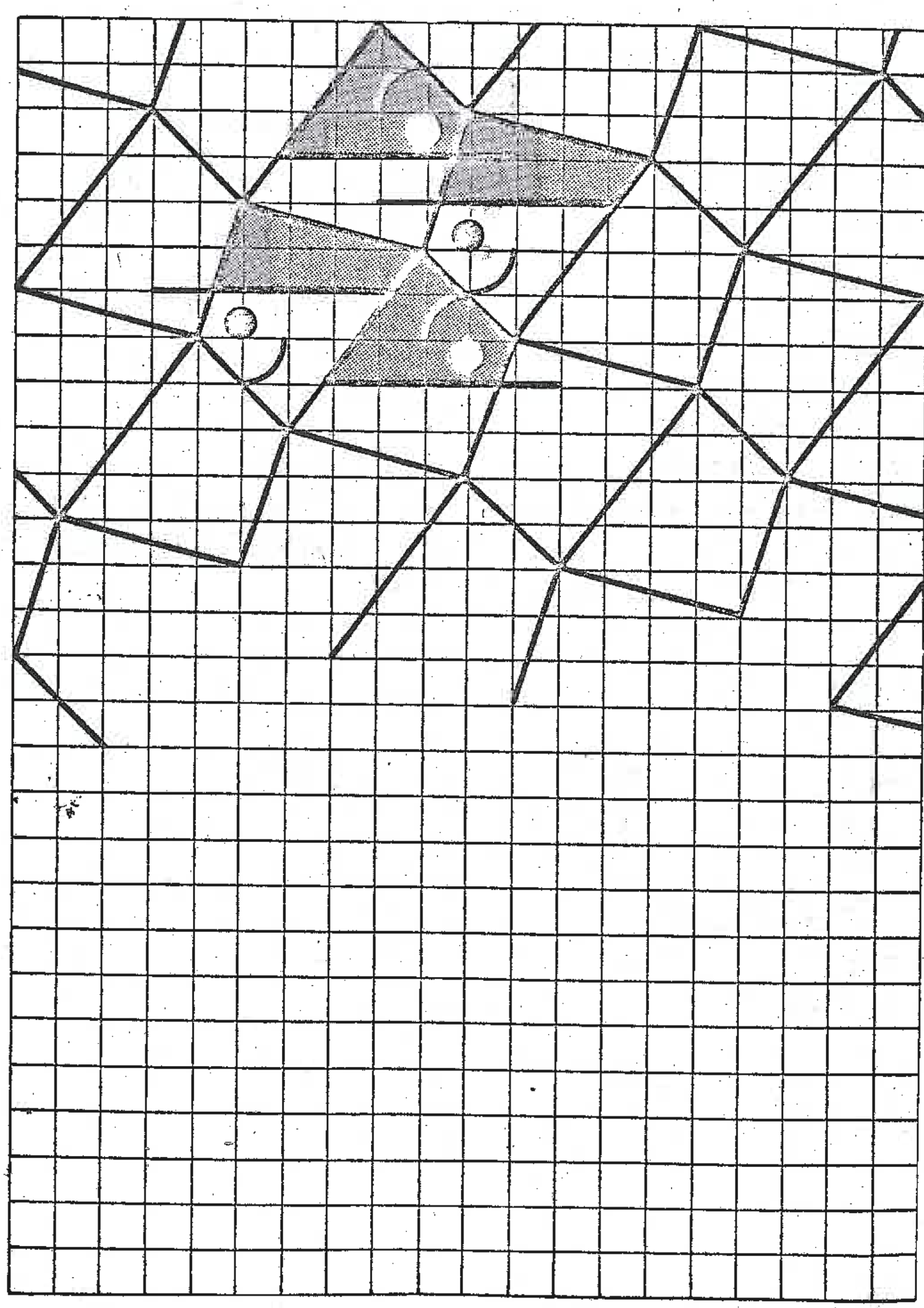


Fig. 27.

2. Con cuadriláteros.

Paso 1: Se cubre el cuadriculado con cuadriláteros congruentes.

Paso 2: Se completa la teselación dibujando figuras congruentes en los cuadriláteros. (Fig. 27).

3. Con exágonos.

Alterando un polígono básico tal como un triángulo o un exágono , M.C. Escher logró ejecutar teselaciones intrincadas y artísticas. La Fig. 28 está basada en un dibujo de Escher.

Paso 1: Se comienza con el triángulo equilátero ABC. Se marca la misma curva a los dos lados AB y AC como se muestra. Se marca otra curva en el lado BC simétrica respecto al punto medio P. Si se escogen las curvas cuidadosamente, como lo hizo Escher, se obtienen interesantes diseños apropiados para teselar.

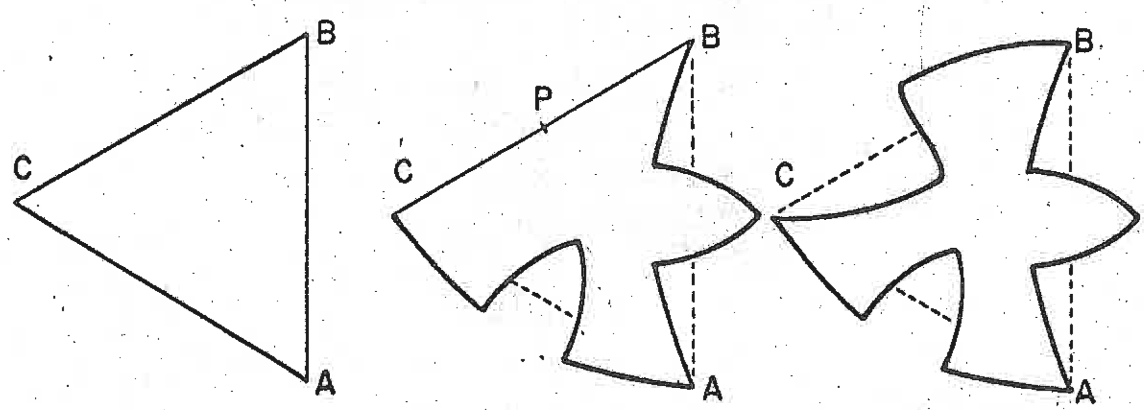


Fig. 28 a.

Paso 2: Seis de estas figuras pueden acomodarse alrededor de un punto formando una distribución exagonal. Volviendo a repetir la figura básica se puede continuar la teselación en todo el plano.

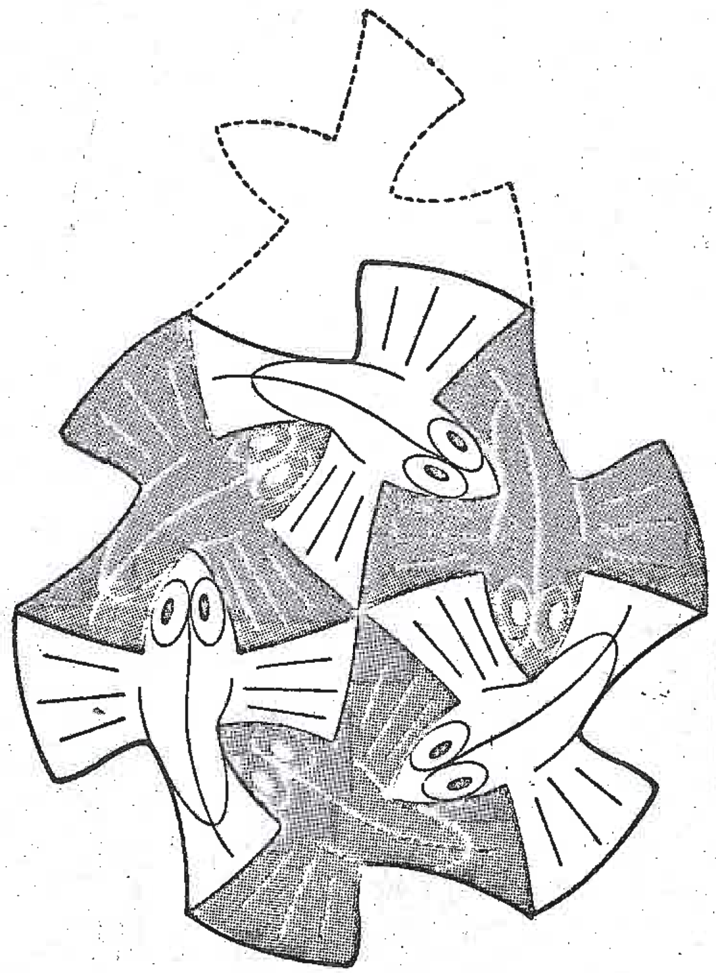


Fig. 28 b.

También es posible hacer teselaciones con polígonos no equiláteros, rectángulos o figuras estrelladas (Fig. 29);

o con polígonos semejantes pero de tamaño diferente (Fig. 30).

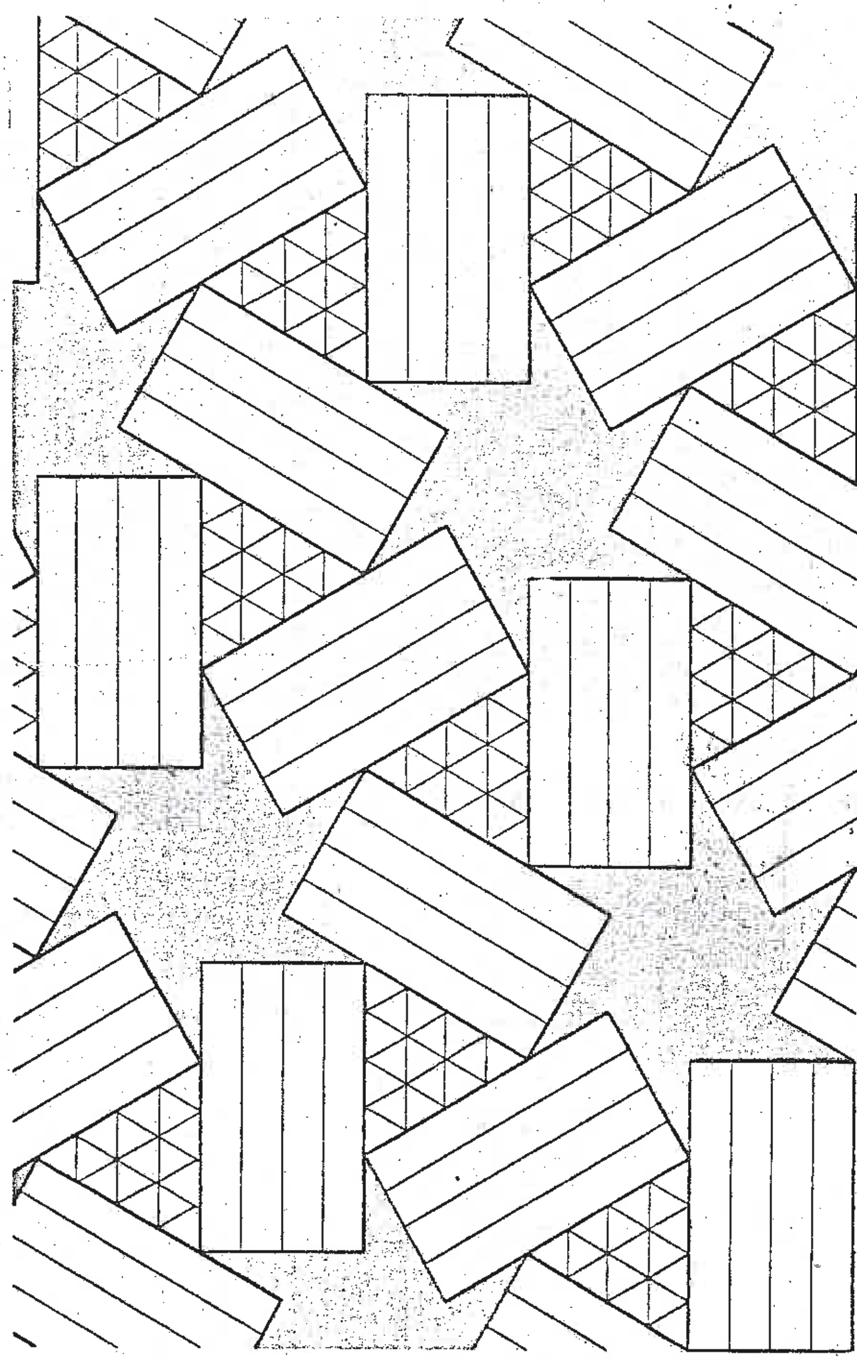


Fig. 29. Teselación con rectángulos, polígonos estrellados y triángulos equiláteros.

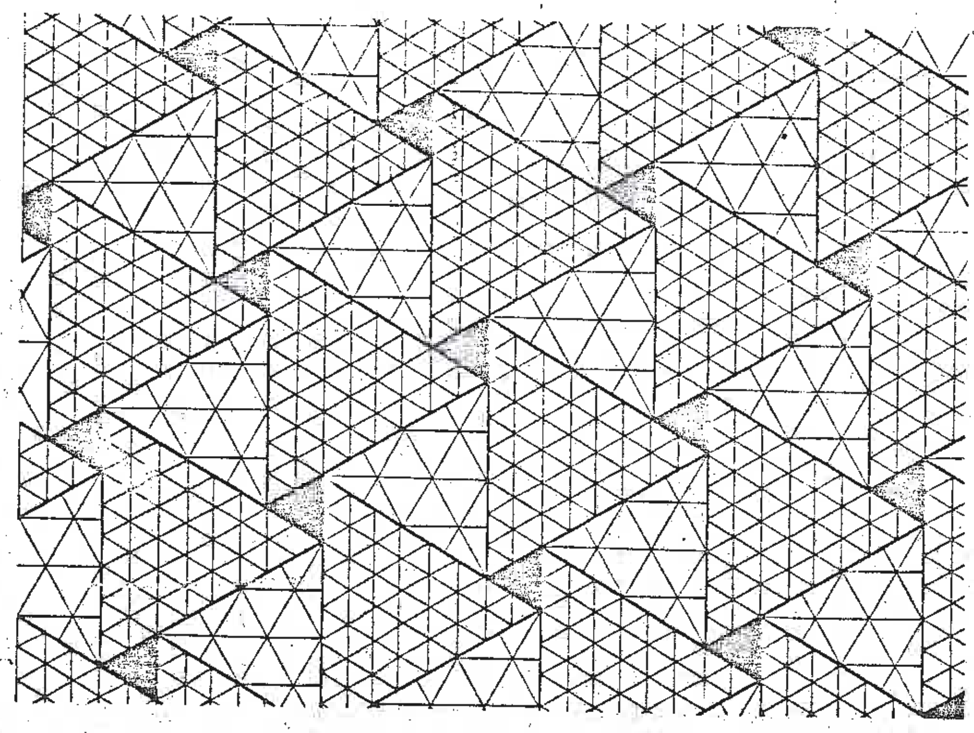


Fig. 30. Teselación con triángulos equiláteros de diferentes tamaños.

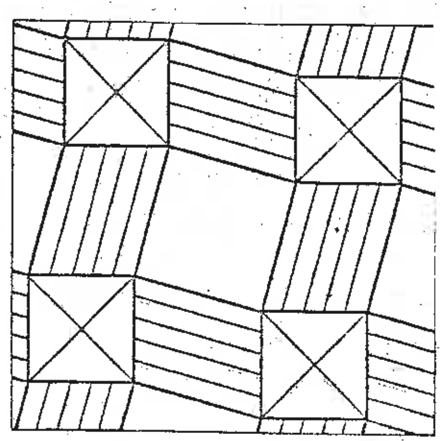


Fig. 31. Teselación con rombos y cuadrados.

CAPITULO V

"LAS MATEMATICAS COMO SOLUCION A LA PROBLEMATICA DEL ARTE MODERNO"

Una sociedad de masa requiere un arte de masa, es decir:la inserción en la personalidad de cada individuo de una cierta cantidad de originalidad.

Para que el arte pueda llegar a toda la gente ha sido necesario copiar las grandes obras de arte de todos los tiempos. Es por esto que el arte está destinado a la copia; hay que admitir que una obra es original solamente en un determinado momento de tiempo, luego pasará a convertirse en la matriz de sus propias copias. La copia da lugar a la degradación y degeneración de la obra de arte: reproducciones efectuadas con tintas de mala calidad, o aquellas en que se altera el formato con diversas intenciones (reducir una Virgen de Rafael a tamaño postal, por ejemplo).

Como la obra del artista debe adquirir un valor social, y la condición esencial para este nuevo valor es la difusión, el problema del arte (especialmente el contemporáneo) es: cómo difundir estas obras, cómo realizar nuevas formas que al ser destinadas a la multiplicación no pierdan su valor original.

Las matemáticas, pueden ayudar a los artistas en la creación de esas nuevas formas que deben seguir siendo originales aún despues de su difusión.

Artistas y matemáticos contemporáneos han aplicado las matemáticas al arte de varias maneras, dando un nuevo sentido al arte, que esté mas de acuerdo con la civilización del siglo XX.

Arte Permutacional.

Una obra de arte permutacional está compuesta por un conjun to finito de elementos y un algoritmo de ensamble.

Los elementos escogidos por el artista de acuerdo a su propia sensibilidad, pueden ser formas estrictamente geométricas o aleatorias; lineales, superficiales o voluminosas colorea-

a b c d

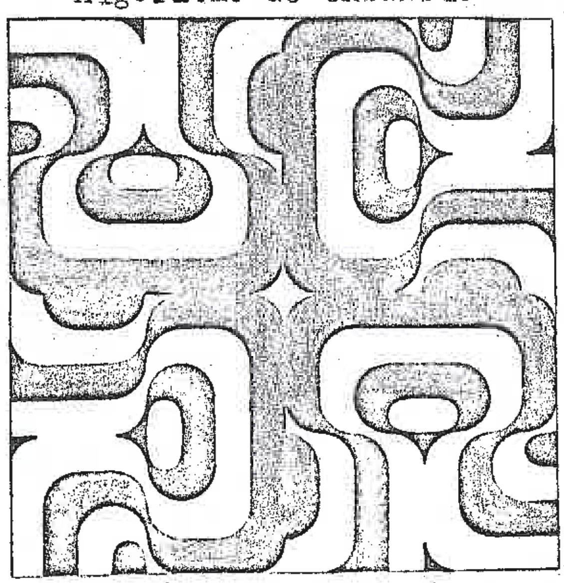
Elementos de base.

1 2 3 4

Direcciones de los elementos obtenidas mediante rotaciones de diferente magnitud.

d'_2	c'_2	sd'_3	sc'_2	c_1	b_2	a'_3	d'_3
a'_2	b'_3	sb'_3	sb'_3	d_1	a_1	b'_4	c'_3
b_1	a_4	sa_4	sb'_1	sd_3	sa_3	sb'_2	sd'_2
c_4	d_4	sd_4	sc_4	sc_3	sb_4	sb'_2	sc'_1
sc'_3	sb'_4	sb_2	sc_1	sc_2	sd_2	d_2	c_2
sd'_4	sb'_4	sa_1	sd_1	sb_3	sa_2	a_2	b_3
c'_1	b'_1	a_3	d_3	sb'_1	sb'_1	b'_1	a'_4
d'_1	a'_1	b_4	c_3	sc'_4	sd'_1	c'_4	d'_4

Algoritmo de ensamble



Resultado final obtenido con ayuda de un computador.

Fig. 1 Op.34.

das o no; en el tiempo o en el espacio.

El algoritmo, manera o procedimiento para ordenar los elementos, puede estar inspirado en las matemáticas, la física o cualquier otra ciencia; es un producto del intelecto del artista, y abre un gran campo de posibilidades para explorar y experimentar.

Barbadillo, del centro de cálculo de la Universidad de Madrid, ha estado creando diseños "Op" por medio de la combinación mecánica de elementos en un computador. Analicemos uno de sus diseños, titulado OP-34. (Fig. 1).

Los elementos de base son los numerados a, b, c, d.

Las direcciones que pueden tomar estos elementos están codificadas 1,2,3,4. La dirección 1 es el mismo elemento de base; la dirección 2 se obtiene mediante una rotación de 90° en la dirección de las manecillas del reloj; la direcciones 3 y 4 se obtienen rotando el elemento base 180° y 270° respectivamente.

Un índice (') en la letra que representa el elemento base indica que se invierten los colores.

Una "s" antes de la letra que representa al elemento base indica que se toma la reflexión del elemento con respecto a un eje vertical en el medio.

Rotando, reflejando o invirtiendo los colores de los elementos de base podemos obtener un gran número de nuevos elementos. Para el elemento "a", por ejemplo, tenemos las siguientes 16 nuevas formas: a_1, a_2, a_3, a_4, sa_1, sa_2, sa_3, sa_4, a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, sa'_1, sa'_2, sa'_3, sa'_4.

Como algoritmo de ensamble, pueden distribuirse aleatoriamente los códigos de los elementos sobre un tablero dividido en casillas. Sin embargo, Barbadillo ordenó los elementos de manera que resultara un diseño "Op" con simetría cíclica.

Algunas veces, como en el ejemplo de la figura 2, es muy difícil o imposible encontrar el algoritmo de ensamble pues los elementos son distribuidos aleatoriamente buscando dar solamente un efecto óptico.

Para el ejemplo de la figura 3 se tomaron cuatro elementos: circulo rojo coloreado, circulo negro coloreado, circulo rojo y circulo negro. Para el algoritmo de ensamble se si

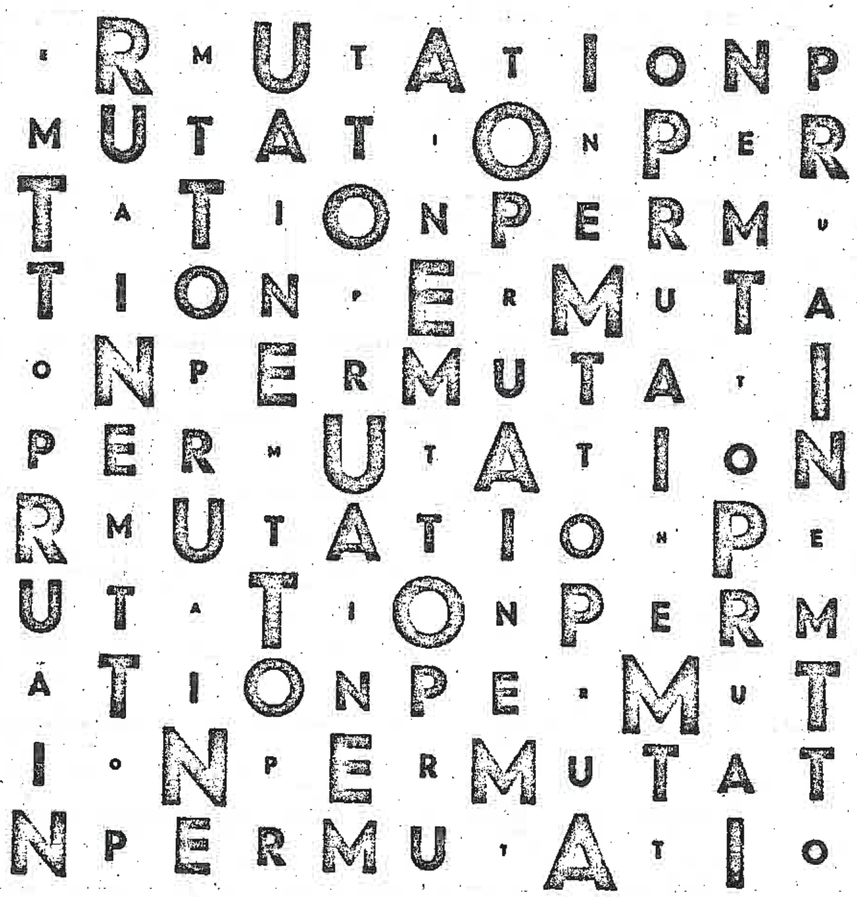


Fig. 2. R. Kalhardt: Juego permutacional de letras.

guió el siguiente procedimiento: Se dividió un cuadrado de 100 casillas iguales, a cada casilla se asignó una pareja ordenada según se muestra en la figura.

Las casillas en donde las dos ordenadas son números primos se dejaron en blanco.

Las casillas en donde solo una de las coordenadas es par (no prima) se rellenaron con círculos coloreados de rojo.

Las casillas en donde las dos ordenadas son pares (no primas) se rellenaron con círculos coloreados de negro.

En las casillas en donde las dos ordenadas son cuadrados perfectos (aunque sean pares o números primos) se colocaron círculos rojos.

Las casillas que no cumplen ninguna de las condiciones anteriores también se colorearon con círculos coloreados de rojo.

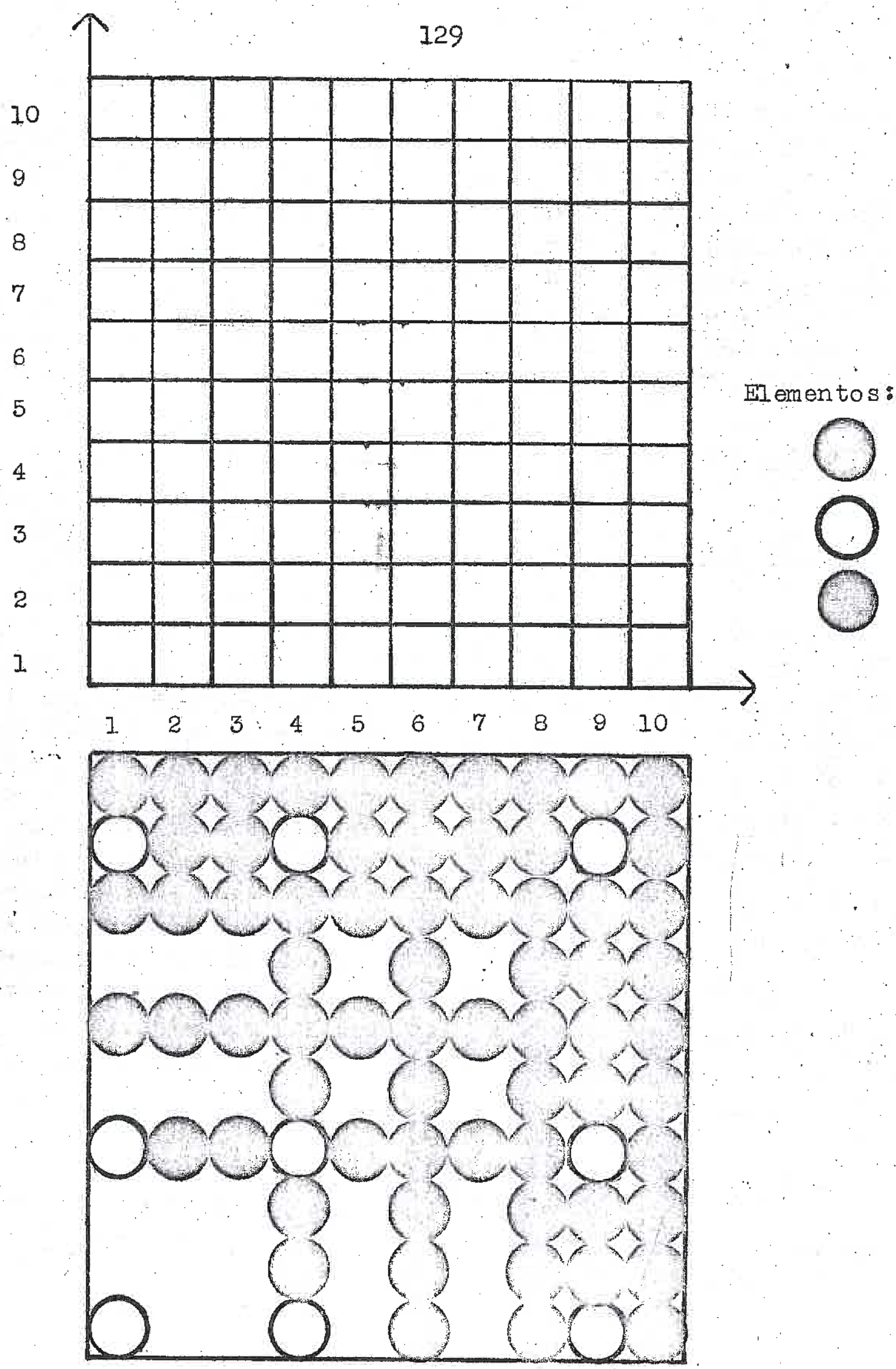


Fig. 3.

Como caso particular de arte permutacional tenemos el "Arte módulo n" que se basa en algoritmos dados por las estructuras de la adición y la multiplicación módulo n. (1).

Al estudiar un sistema matemático es muy conveniente construír la tabla de la operación del sistema para poder observar visualmente algunas de las propiedades de este. Los diseños que estudiaremos aquí se obtienen asignando a cada elemento de la operación, una forma determinada que es reemplazada en la casilla correspondiente de la tabla de operación del sistema.

En la figura 4 se muestra la tabla de la adición módulo 9. Para cada uno de los nueve elementos de la operación se ha escogido una forma basándose en el hecho de que cada elemento del sistema tiene un inverso aditivo. Es así como la forma básica ha sido escogida para representar el cero. Las regiones de esta forma se han coloreado de diferente manera para obtener un conjunto de ocho formas distintas, de modo que los diversos aditivos se representan por medio de formas complementarias. Luego de hacer cada asociación forma-número, la forma se coloca en la casilla correspondiente de la tabla. (Fig. 5).

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	0
2	2	3	4	5	6	7	8	0	1
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	6	7	8	0	1	2	3
5	5	6	7	8	0	1	2	3	4
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	0	1	2	3	4	5	6
8	8	0	1	2	3	4	5	6	7

Fig. 4.

---

(1) Forseth, Sonia y Andria Pricetroutman. "Using mathematical structures to generate artistic designs". The Mathematics Teacher. Vol. 67, número 5 (Mayo, 1974), pgs.

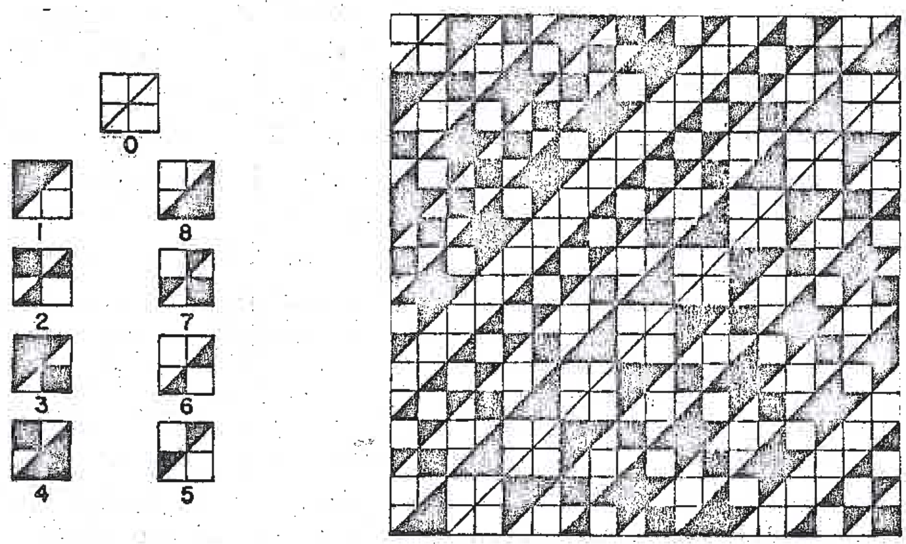


Fig. 5.

El diseño que se muestra en la figura 5 puede variarse de diferentes maneras con el fin de producir otros diseños mas complicados. Una de estas variaciones consiste en reflejar el diseño a lo largo de un eje vertical, para luego reflejar lo obtenido a lo largo de un eje horizontal. (Fig. 6).

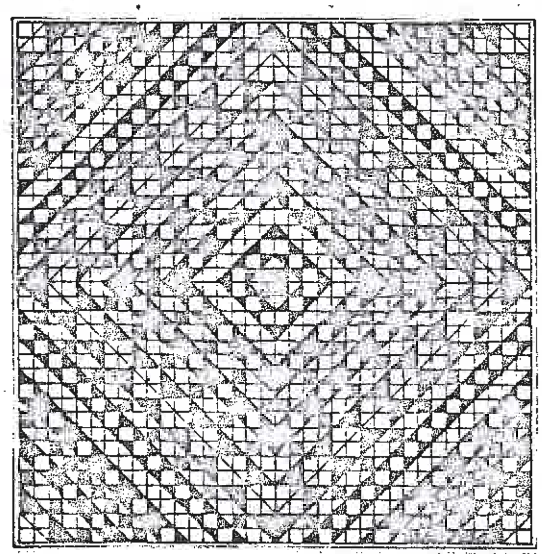


Fig. 6.

En la figura 7 se muestra la tabla de la adición módulo 5. Las formas correspondientes a cada número han sido escogidas teniendo en cuenta que cada elemento tiene un inverso aditivo (para los inversos aditivos se han escogido formas complementarias). El diseño se ha reflejado a lo largo de un eje vertical y luego a lo largo de un eje horizontal; pero además las casillas de la tabla se han dibujado de una manera no-uniforme, produciendo un diseño que parece haber sido construído con curvas (Fig. 8).

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Fig. 7.

En la figura 9 aparece la tabla de la multiplicación módulo 5. Para construír el diseño de esta tabla se han excluído las casillas correspondientes al cero. Las formas se han colocado en unas casillas construídas de manera que den un efecto caleidoscópico. (Fig. 10).

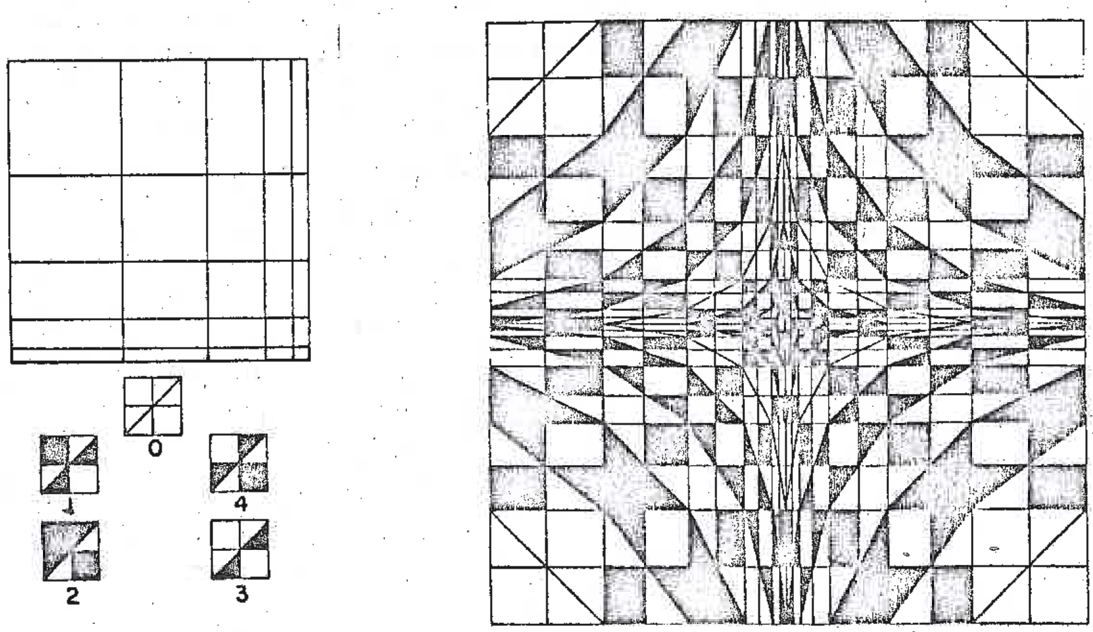


Fig. 8. Un diseño basado en la tabla de la adición módulo 5.

•	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Fig. 9.

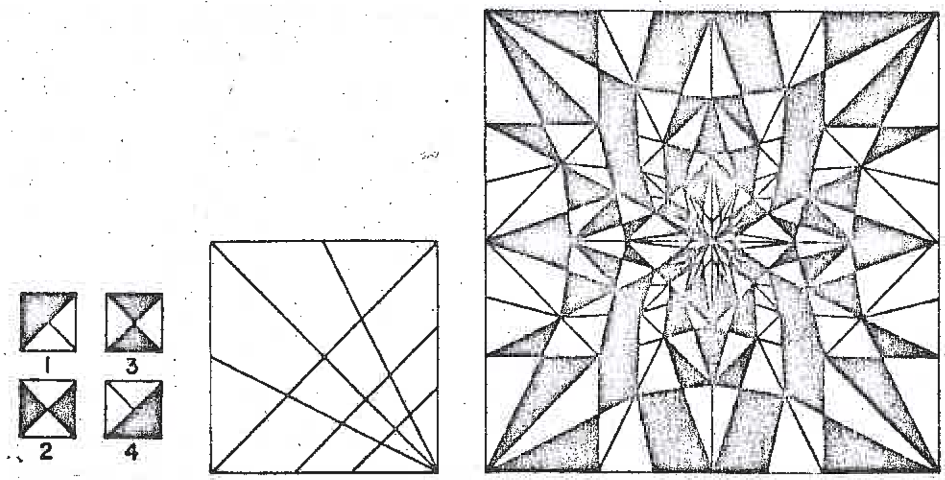


Fig. 10. Diseño basado en la multiplicación módulo 5.

Literatura Permutacional

No solamente las artes plásticas han sufrido las consecuencias de la sociedad de masa; también encontramos en literatura el fenómeno de la popularización: novelas que son un objeto más de consumo; autores como Arthur Hailey ("Aeropuerto"), Frederic Forsyth ("El Chacal") o Mario Puzo ("El Padrino") que solo esperan que su obra se convierta en "best-seller" para poder saltar a la fama.

Como reacción contra esta degeneración de la literatura han aparecido diversas corrientes tales como la poesía concreta y la literatura permutacional, caracterizadas las dos por dar más importancia al sonido que al significado mismo de frases y palabras.

La literatura permutacional consiste en permutar en textos o conversaciones cotidianas algunas frases, palabras, sílabas o letras, de acuerdo a determinadas reglas.

El escritor francés Jean Tardieu es uno de los principales exponentes de este nuevo género de literatura; a continuación se incluye un extracto de "Un mot pour un autre", texto hecho al reemplazar "una palabra por otra" en una conversación de salón.

Extracto de "Una Palabra Por Otra" de Jean Tardieu. (2).
(Traducción libre del francés)

La sirvienta- Señora, es la Señora de Perlimanuza.
Señora- Ah! Que racimo! Hazla engordar rápidamente.
La sirvienta- La Señora Condesa de Perlimanuza.
Señora- Querida, querida felpa. Cuantos huecos hacía que no tenía el vigor de azucararte...
Condesa- Querida, no sabes lo vidriosa que he estado. Nuestros tres pasteles menores tuvieron la limonada el uno después del otro. Durante todo el comienzo del corsario no hice sino esconder molinos, correr donde el ferretero y donde el taburete; pasé pozos vigilando sus carburos, dándoles alicates y monzones. No tuve ni una gatita libre.
Señora- Pobre querida! Y yo sin rascar nada.
Condesa- Pues mejor! Yo me recocino. Tenías bien merecido empegotarte después de todos los borradores que quemaste. Empu-

(2) Moles, Abraham. Art et ordinateur. (Belgique: Syntheses Contemporaines Casterman, 1971), pág. 114.

ja: Hace tortas que no se te vé ni en el "water-proof", ni bajo las alteas del bosque de jaqueca. Debes haber estado verdaderamente garantizada! ...

Otros autores de literatura permutacional son: Isidore Isou, quien escribe poemas con la rima en el interior de las palabras; Jean Lescure, con sus variaciones "S+n" del Génesis, que consisten en buscar en el diccionario cada sustantivo que aparece en el texto y reemplazarlo por el enésimo contado a partir del buscado; Vicente Huidobro cambiando arbitrariamente las últimas sílabas de algunas palabras, para dar así un nuevo sentido al poema.

<u>Génesis según la regla "S+10" de Jean Lescure</u>. (3).

El diplomático dijo: "Que el llamado sea" y el llamado fué. El diplomático vió que el llamado era bueno y separó el llamado del tintero. El diplomático llamó al llamado "diablura" y al tintero "nogalina". Y hubo una tarifa y hubo una mañoca: primera diablura.

<u>El Génesis según la regla "S+25" de Jean Lescure</u>:

El diputado dijo: "Que la llanta sea" y la llanta fué. El diputado vió que la llanta era buena y separó la llanta del tío. El diputado llamó a la llanta "diadema" y al tío "nómina". Y hubo un tarjetón y hubo una maqueta: primera diadema.

<u>Altazor (canto IV) de Vicente Huidobro</u>.

No hay tiempo que perder
Ya viene la golondrina monotémpora
Trae un acento antípoda de lejanías que se acercan
Viene gondoleando la golondrina

Al horitaña de la montazonte
La violondrina y el goloncelo
Descolgada esta mañana de la lunala
Se acerca a todo galope
Ya viene la golondrina
Ya viene la golonfina
Ya viene la golontrina

---

(3)OP. Cit., pág. 112.

Ya viene la goloncima
Viene la golonchina
Viene la golonclima
Ya viene la golonrisa
La golonniña
La golongira
La golonlira
La golombrisa
La golonchilla...

Patrones de Crecimiento de Figuras.

En esta sección estudiaremos algunas de las posibilidades estéticas que presentan las "figuras en crecimiento" En 2 y 3 dimensiones.

Parte del trabajo que sigue fué efctuado por Stanislaw Ulam, J.C. Holladay y R. G. Schrandt (Notices of the American Mathematical Society, 7, 1960, pág. 234 y sigs. y pág. 624 y sigs.). Ellos usaron computadores electrónicos en el Laboratorio Científico de Los Alamos para producir un gran número de modelos de crecimiento y para vigilar ciertas propiedades de su morfología que se mantenían constantes al variar el tiempo o el espacio.

Partiendo de una configuración inicial se define una regla de adición de partes en generaciones sucesivas, obteniendo así un crecimiento de la figura inicial en unidades discretas de tiempo.

El caso mas sencillo es aquel en que se empieza con un número finito de cuadrados y se define la siguiente regla de crecimiento: Dado un número de cuadrados en la generación n-sima, los cuadrados de la generación (n+1) serán todos aquellos adyacentes a los ya existentes pero con la siguiente restricción: no se tomarán aquellos cuadrados que son adyacentes a mas de uno de los cuadrados de la n-sima generación.

Por ejemplo, si comenzamos con un cuadrado en la primera generación obtendremos, luego de cinco generaciones, la configuración que se muestra en la figura 11. Es obvio que con esta regla de crecimiento la figura continuará aumentando in definidamente. Tendrá las mismas simetrías que presenta la figura inicial (un cuadrado); y en los cuatro ejes perpendiculares todos los cuadrados estarán presentes; estos son los "tallos", de los que nacerán ramas laterales de longitudes diversas.

En la figura 12 aparece el mismo modelo de crecimiento dibujado hasta la generación quince. Además se ha coloreado de la siguiente forma: las generaciones que tienen como índice algún número de la serie 1,2,3,4,6,8,11,13,16,18,26,28,... serán rojas y las restantes serán azules. Veamos de donde sale dicha serie: comenzando con los enteros 1,2 construímos nuevos enteros que deberán ser la suma de dos enteros previamente definidos, pero no incluiremos en la colección a aquéllos enteros que pueden expresarse como dos o mas sumas de enteros anteriormente definidos (incluídos en la serie). El 5 no está en la serie porque puede expresarse como dos sumas de enteros anteriores (1+4, 2+3). El siguiente entero que puede expresarse como una y solo una suma de dos enteros anteriores es el 6; el 7 tiene doble representación, etc.

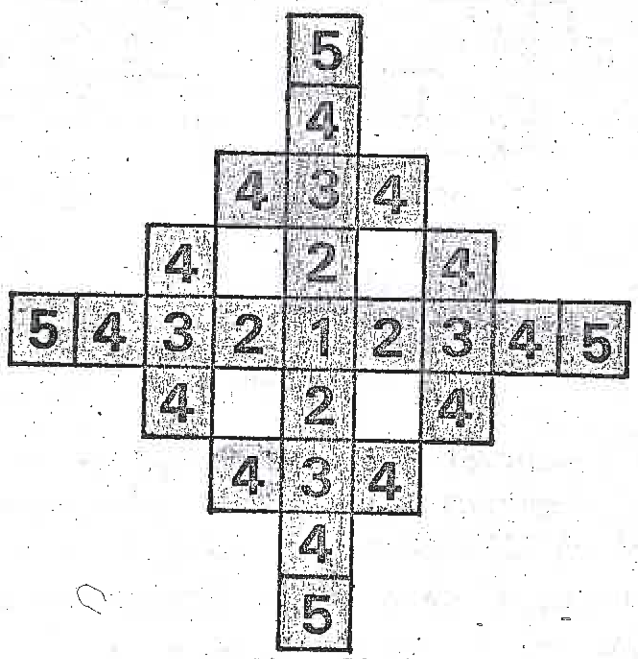


Fig. 11.

Podemos considerar otra regla de crecimiento, similar a la anterior pero con una pequeña modificación. Comenzamos

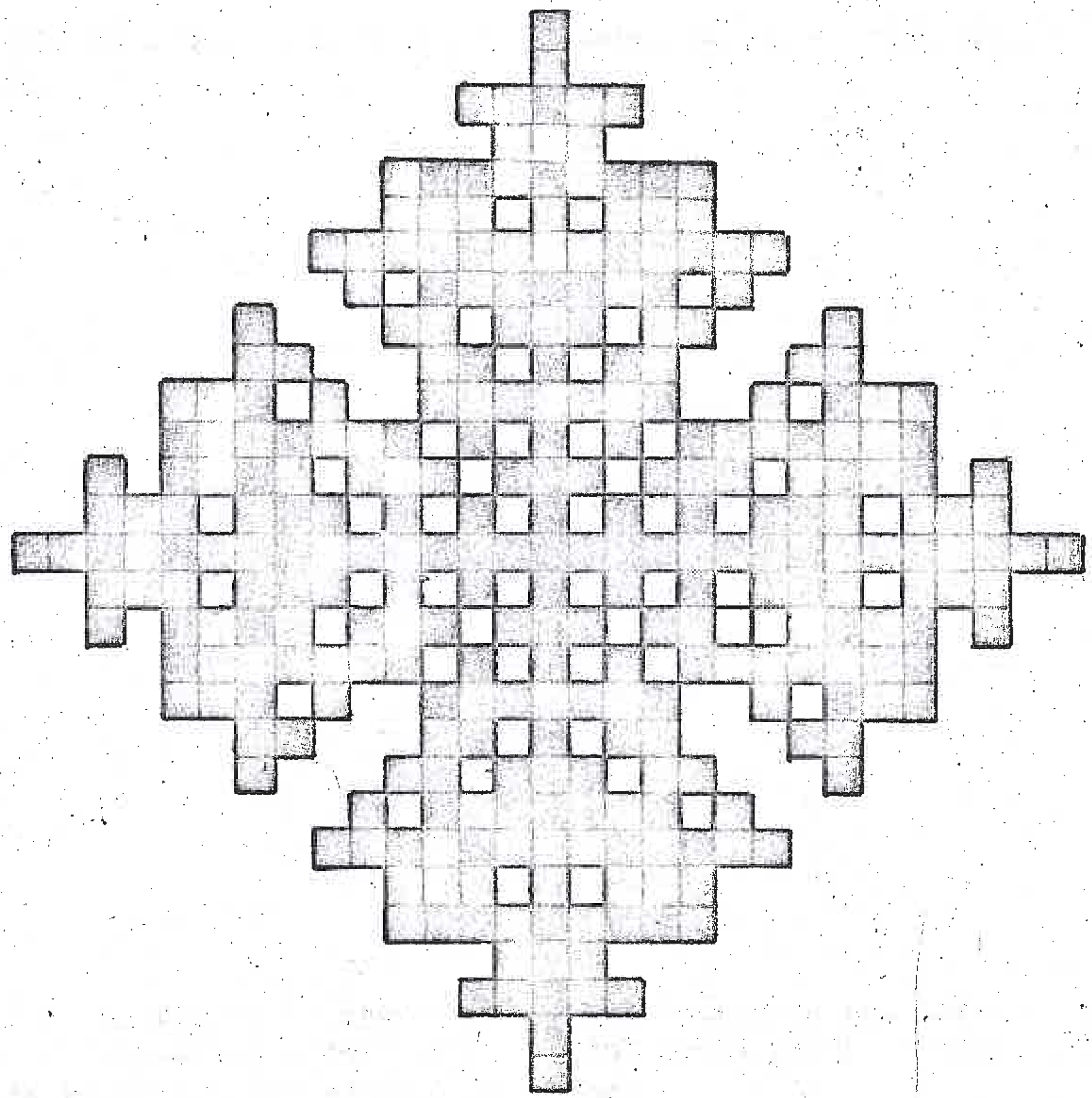


Fig. 12.

nuevamente con un solo cuadrado y definimos la generación (n+1) como cuadrados adyacentes a cuadrados de la n-sima generación, pero modificamos la restricción de la siguiente manera: no pondrémos ningún cuadrado en la generación (n+1) si otro candidato para esta generación fuera tal que tocara en un vértice el cuadrado en consideración. Con esta regla obtendremos, luego de cinco generaciones la figura que aparece abajo (Fig. 13). Notemos que los tallos continuarán indefinidamente, pero que la densidad será menor que en el caso anterior.

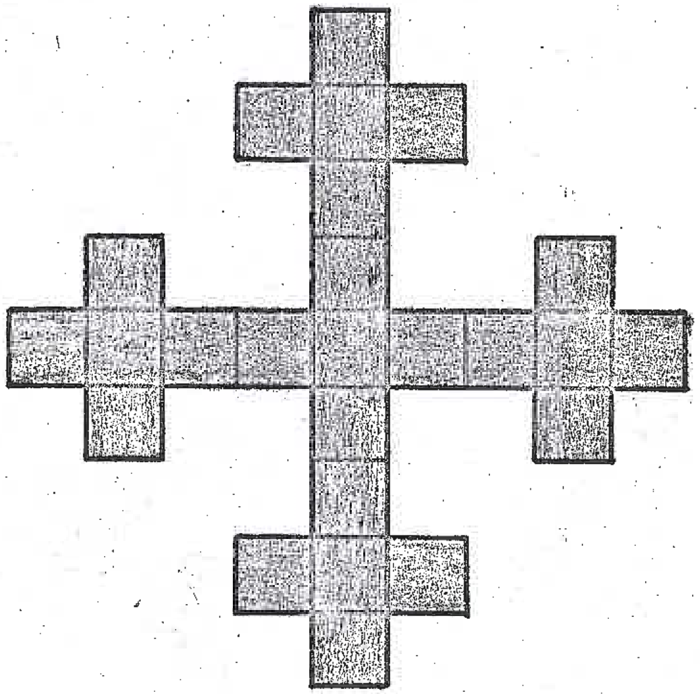


Fig. 13.

En la figura 14 aparece el mismo patrón de crecimiento hasta la generación número quince y coloreado según la misma fórmula recursiva del ejemplo anterior.

Una propiedad de este patrón de crecimiento está dada por un teorema debido a J. C. Holladay: En generaciones cuyo índice n es de la forma $n= 2^k$ (k entero), el crecimiento se detiene en todas partes menos en los "tallos". (4).

Pueden construírse patrones de crecimiento similares reemplazando los cuadros por triangulos equiláteros o cualquiera otra figura geométrica.

Otra clase de relación recursiva de crecimiento es la que Stanislaw Ulam ha llamado "regla de muerte de los elementos

---

(4) Ulam, Stanislaw. "Patterns of growth of figures". Module, Proportion, Symmetry, Rhythm; Gyorgy Kepes, editor. (New York: 1970), pag. 62.

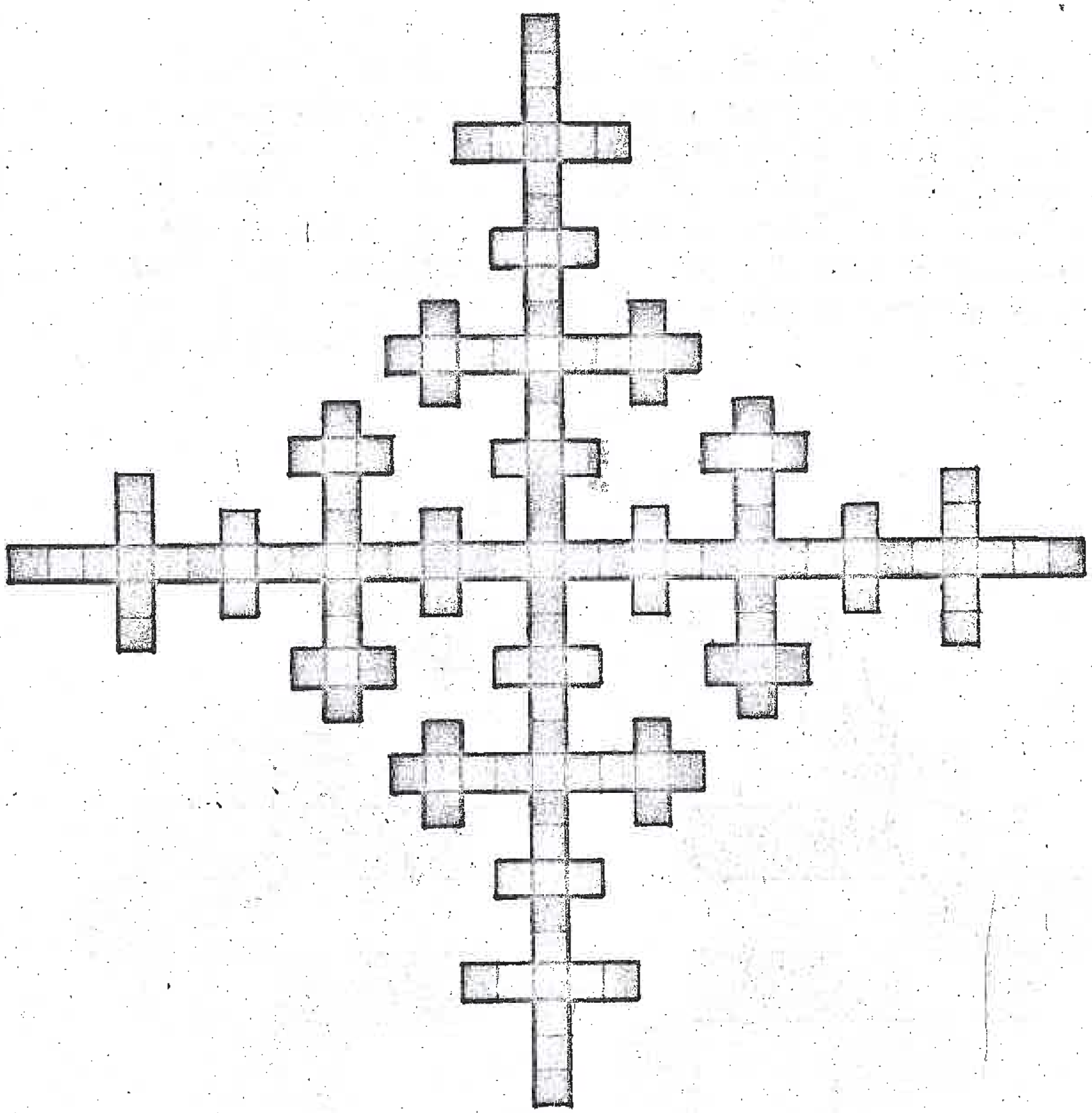


Fig. 14.

viejos" (5); veamos en que consiste. Sea k un entero fijado arbitrariamente. A nuestra relación de recurrencia para la construcción de nuevos elementos agregamos la siguiente regla: se borran del patrón todos los elementos que son k-generaciones anteriores. Supongamos que k es igual a dos y consideremos la regla de crecimiento de cuadrados del primer

(5) Op. Cit., Pag. 64.

ejemplo pero con la siguiente nueva condición: luego de haber construído los elementos de la generación (n+1) debemos borrar todos los elementos de la generación (n+1). Si en esta construcción comenzamos con dos cuadrados adyacentes, en la primera generación observaremos sucesivas divisiones (debidas a los cuadrados que borramos) y recombinaciones del patrón. La figura 16 muestra el modelo que se obtiene luego de 8 generaciones.

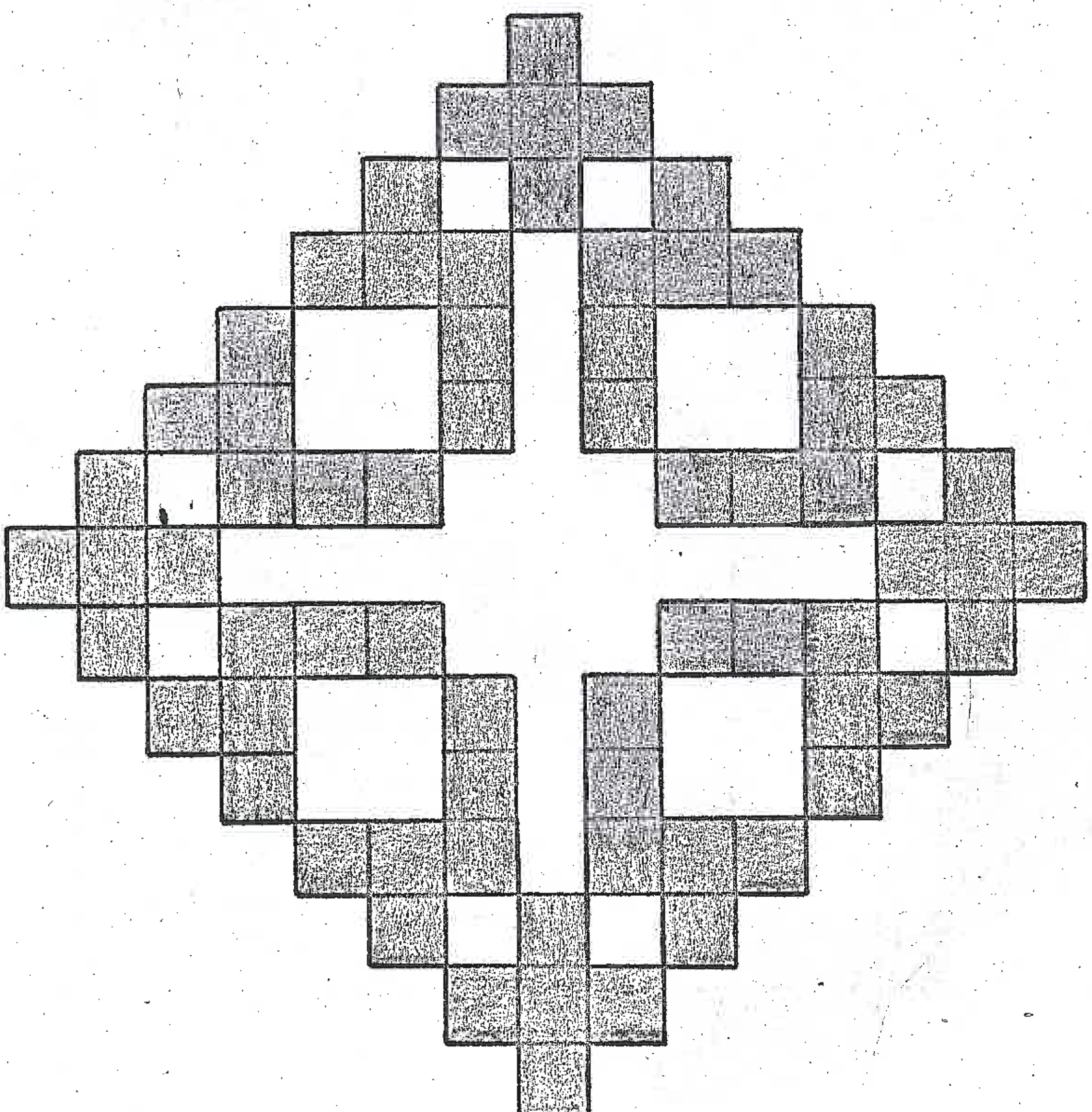


Fig. 15.

En patrones que tienen la regla de crecimiento del primer ejemplo y la regla de muerte de los elementos de la tercera generación anterior, se ha encontrado que si la primera generación está formado por dos cuadrados diagonales que se tocan en las esquinas, entonces cada 2^p-sima (p entero posit.) generación el modelo es producido como cuatro copias de si mismo, desplazadas 2^p unidades del patrón original (Fig. 16). Se tiene el mismo comportamiento para modelos que comienzan con 4,8,16,... cuadrados situados diagonalmente. (6).

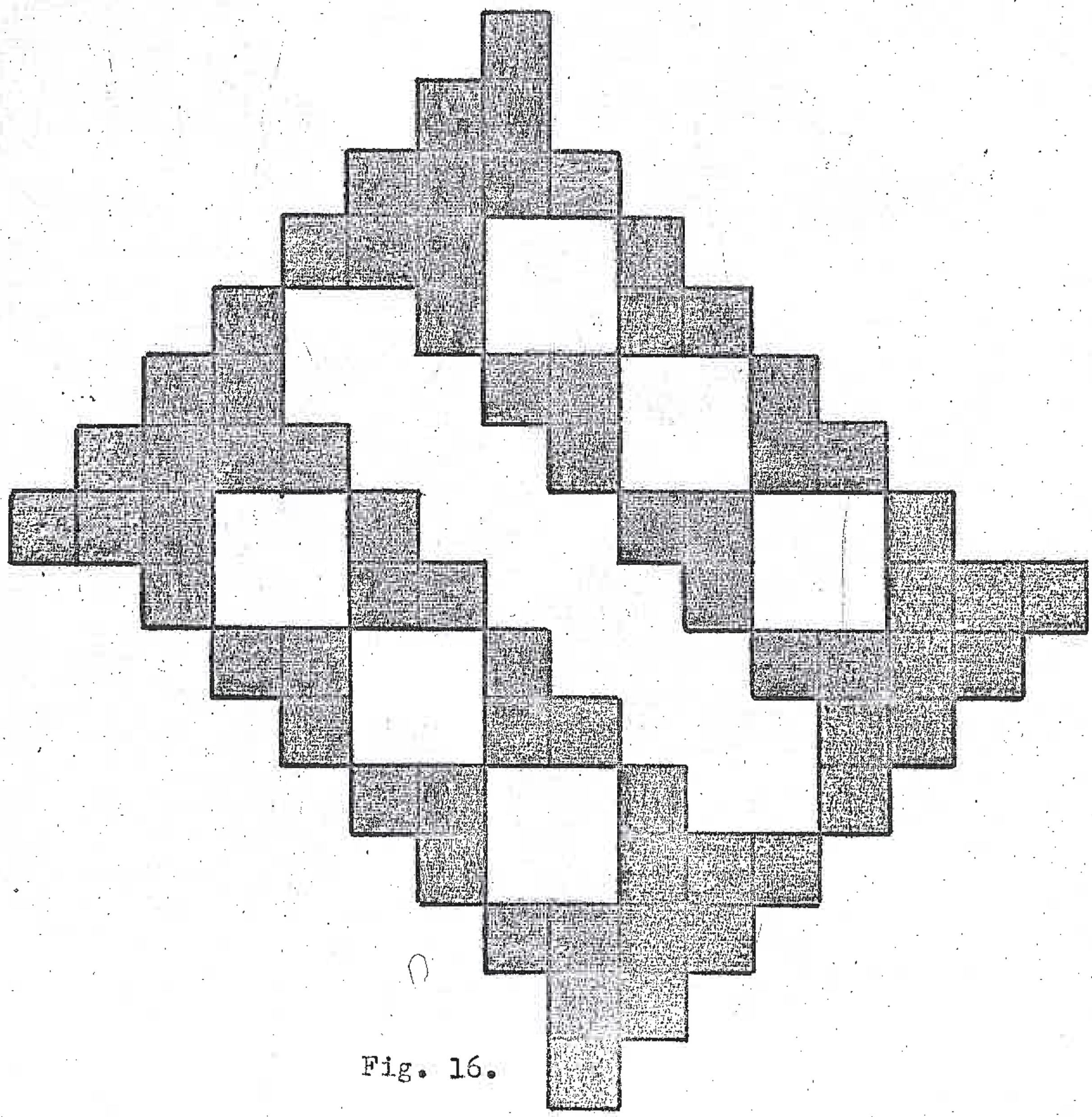


Fig. 16.

(6) Op. Cit., pág. 67.

En tres dimensiones pueden definirse patrones de creci-

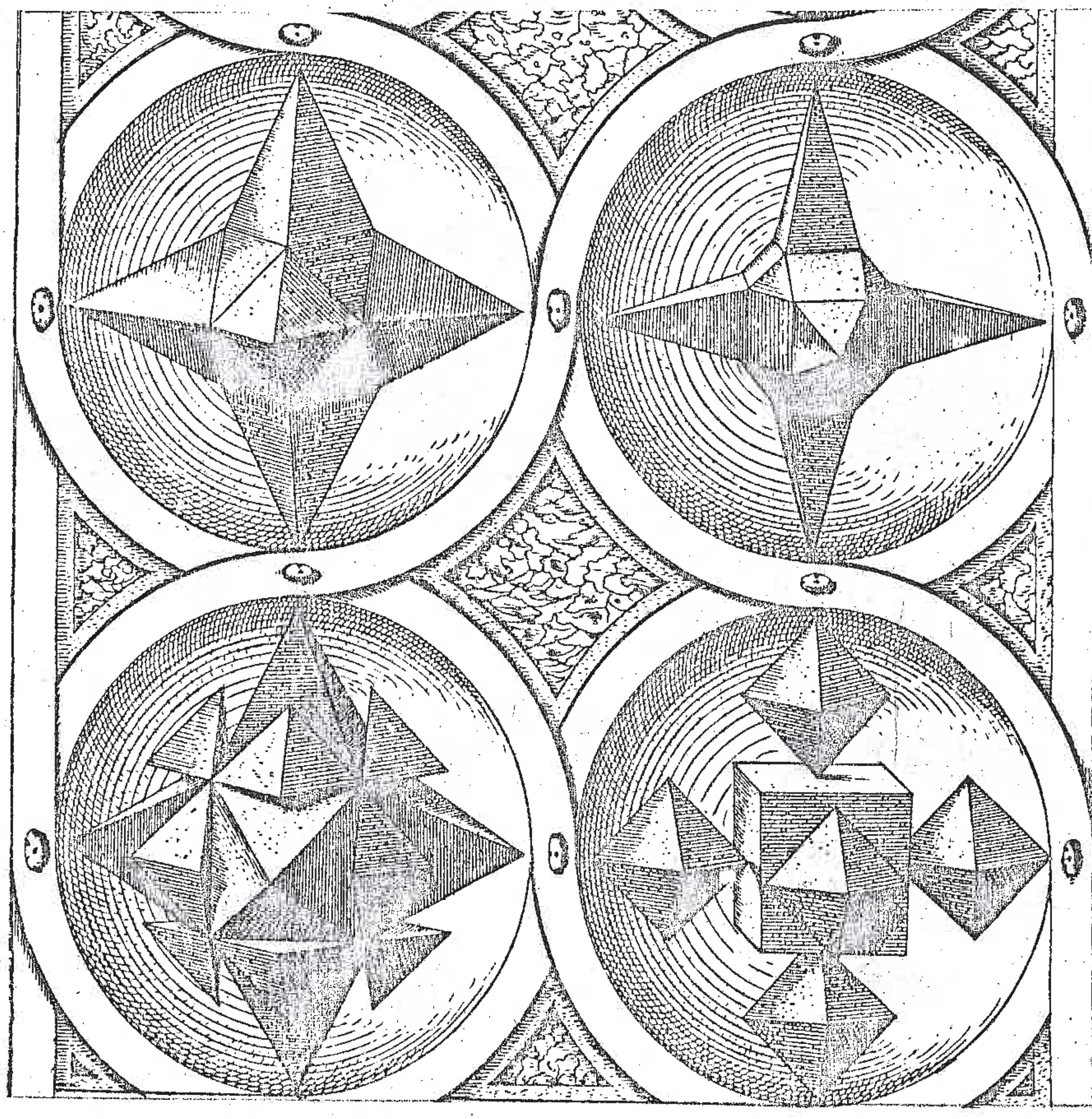


Fig. 17. Poliedros de "Perspectiva Corporum Regularium" de Wenzel Jamnitzer; publicado por primera vez en 1563

miento similares a los definidos en dos dimensiones, pero tomando como elementos cubos, pirámides, esferas o cualquier otra figura tridimensional.

A continuación aparecen algunas figuras en las cuales se puede encontrar crecimiento tridimensional.

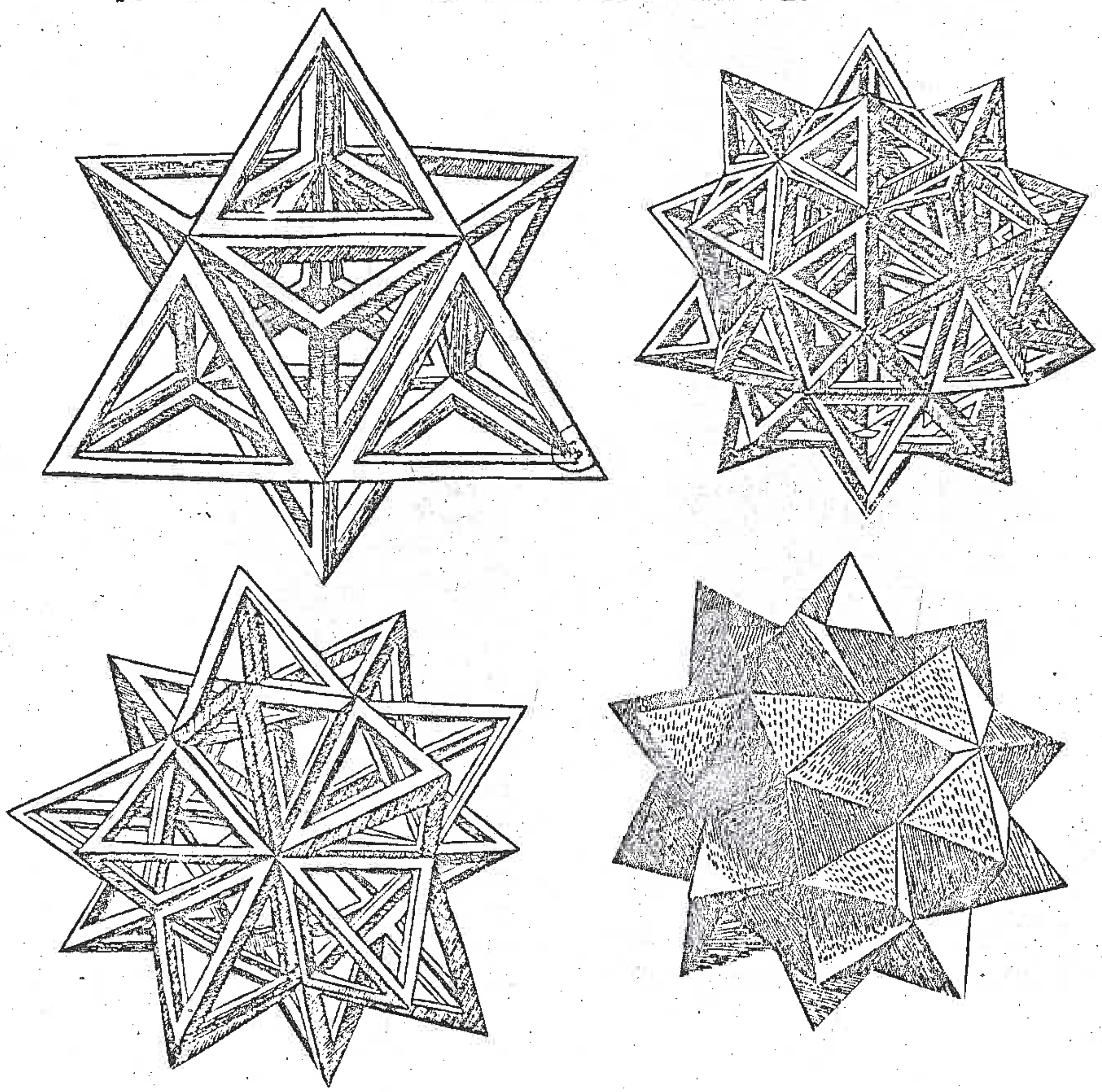


Fig. 18. Cuerpos regulares dibujados por Leonardo da Vinci para la "Divina Proportione" de Luca Pacioli, 1509.

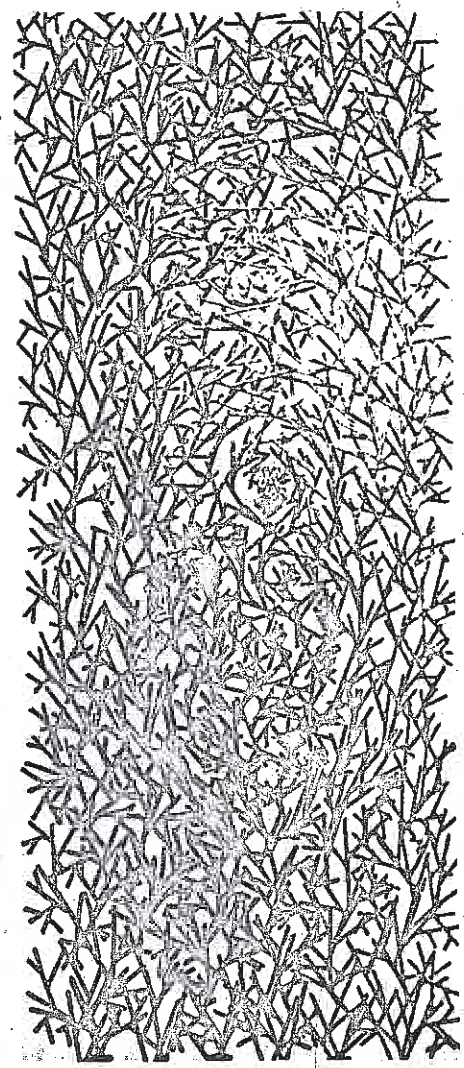


Fig. 19. Escultura de S.
Filipowsky, 1964.

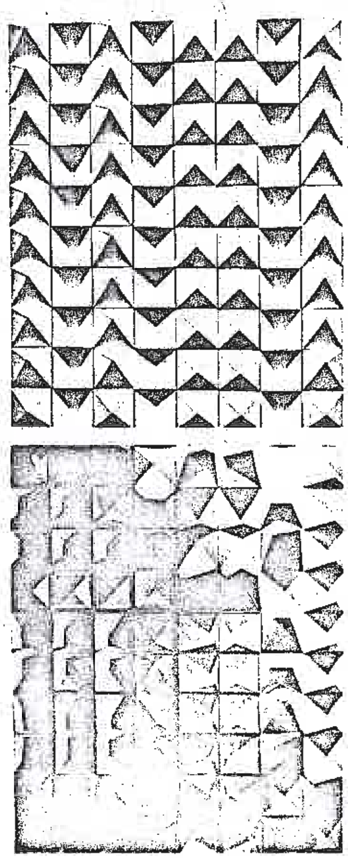


Fig. 20. Animación rítmica de superficies mediante la iluminación de unidades modulares puestas en combinaciones diferentes. Massachusetts Institute of Technology, Professor R. Preusser.

Líneas Mágicas en Cuadrados Mágicos.

Casi todos sabemos lo que es un cuadrado mágico. Brevemente es un acróstico numérico, unos números ordenados en forma de cuadrado, que, al ser sumados horizontal, vertical o diagonalmente siempre dan el mismo resultado. Los cuadrados mágicos tienen su origen en el antiguo oriente, En la puerta de entrada del fuerte de Gwalior en India encontramos un cuadrado mágico de cuatro por cuatro tallado en caracteres sánscritos. (Fig. 21).

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

Fig. 21. Cuadrado Hindú.

Estos cuadrados mágicos ocuparon la atención de los filósofos, astrólogos y místicos de la Edad Media. Albrecht Durer introdujo en su grabado "Melancolía" uno de los más asombrosos cuadrados mágicos que se conocen (Fig.22) La aparición del cuadrado mágico en el ángulo superior del grabado es una paradoja pues durante el Renacimiento los astrólogos aseguraban que los talismanes y amuletos en forma de cuadrado mágico eran una contra la melancolía (7). Cada una de las diagonales, horizontales y verticales de este cuadrado suma treinta y cuatro. Pero el cuadrado también tiene otra propiedad de simetría: cada número sumado con el simétricamente opuesto con respecto al centro da diecisiete. Como construyó Durer tal ordenación de números? No sabemos, pero podemos notar que el cuadrado se obtiene siguiendo los siguientes pasos: Escribir ordenadamente dentro de un cuadrado con dieciseis casillas los números del uno al dieciseis; Permutar la segunda columna con la tercera y finalmente, invertir ambas diagonales (Fig. 23).

(7) Holt, Pág. 34.

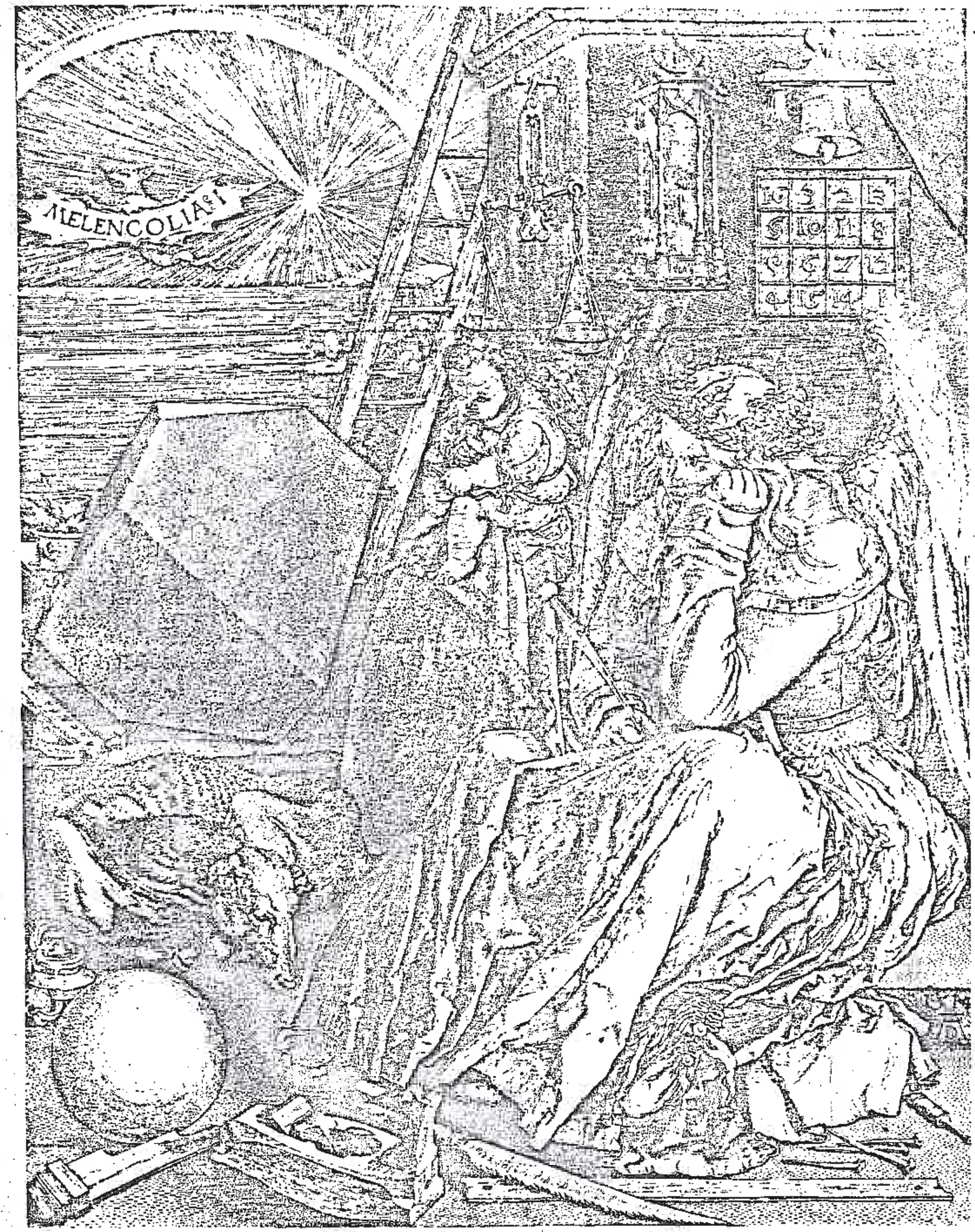


Fig. 22. Albrecht Durer: "Melancolía", 1514. Esta es la primera versión del famoso grabado de Durer.

1	2	3	4		1	3	2	4		16	3	2	13
5	6	7	8		5	7	6	8		5	10	11	8
9	10	11	12		9	11	10	12		9	6	7	12
13	14	15	16		13	15	14	16		4	15	14	1

Fig. 23. Proceso para obtener el cuadrado mágico de Durer.

Hoy día, los cuadrados mágicos encuentran campo en la sección de pasatiempos de las revistas. Sus leyes y fórmulas han sido estudiadas por matemáticos, y el descubrimiento de las llamadas "relaciones mágicas" entre números, no solamente en cuadrados, sino también en cubos y en hipercubos, es una de las diversiones que ofrecen las matemáticas (Fig. 24).

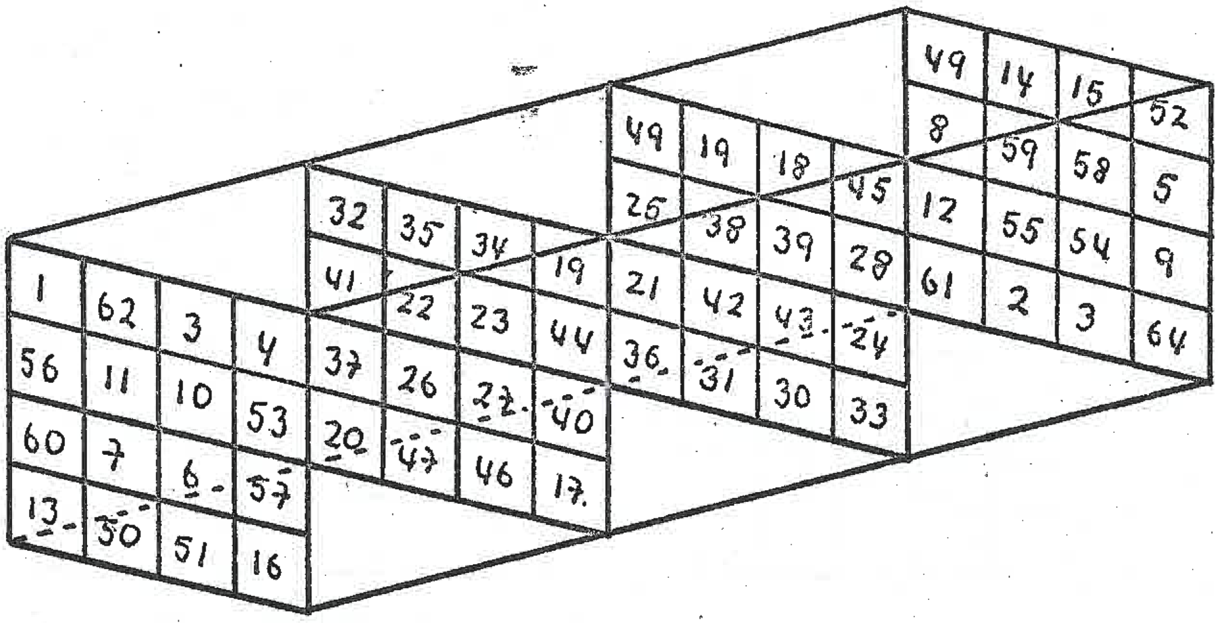


Fig. 24. Cubo mágico de cuatro.

El artista, aunque se preocupe poco de los aspectos matemáticos, puede interesarse en las posibilidades que ofrecen las líneas mágicas de los cuadrados mágicos.

Una línea mágica es una línea contínua formada al seguir los números de un cuadrado mágico en su orden natural, de casilla en casilla y volviendo al punto de origen (8). Como la mayoría de los cuadrados mágicos son obtenidos ordenando sobre un cuadrado los números en su orden natural y sometiéndolos a cier-

(8) Bragdon, Claude. Projective Ornament. (Rochester: Manas Press, 1915), pág. 48.

tas rotaciones y permutaciones, pueden compararse con los diferentes diseños que se obtienen al hacer un nudo en una cuerda.

Veamos como obtener una línea mágica en un cuadrado mágico de tres. Para construír el cuadrado se ordenan los primeros 9 números naturales en un cuadrado de nueve casillas (Fig. 25).
Se rotan 135^{o} alrededor de la casilla del medio (que tiene el número 5); se permutan los números de las esquinas con los diagonalmente opuestos. Cada línea vertical, horizontal o diagonal suma quince. Ahora, con un lápiz se dibujan líneas rectas o una curva a mano alzada, siguiendo los números en orden de 1 a 9 y volviendo al 1. El resultado es la línea mágica del cuadrado mágico de tres, línea de gran equilibrio e interés, directamente traducible a diseño.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

8	7	4
9	5	1
6	3	2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

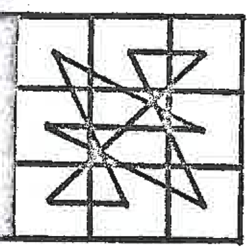


Fig. 25. Cuadrado mágico de tres y su línea mágica.

Como el número de cuadrados mágicos es muy grande, y cada uno tiene una línea mágica, resulta un rico campo para el diseñador, aunque no todas las líneas mágicas se presten a un tratamiento artístico. Las figuras 26, 27, 28 y 29 muestran algunas de estas líneas mágicas a partir de sus cuadrados de origen.

9	7	14	4
6	12	1	15
3	13	8	10
16	2	11	5

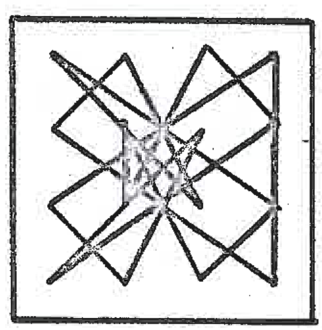


Fig. 26. Cuadrado mágico de cuatro y su línea mágica.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

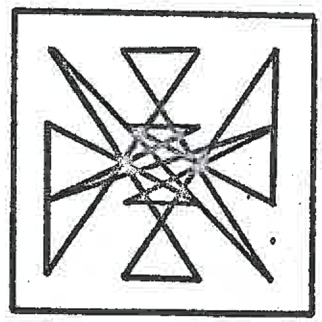


Fig. 27. Cuadrado mágico de cuatro y su línea mágica

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

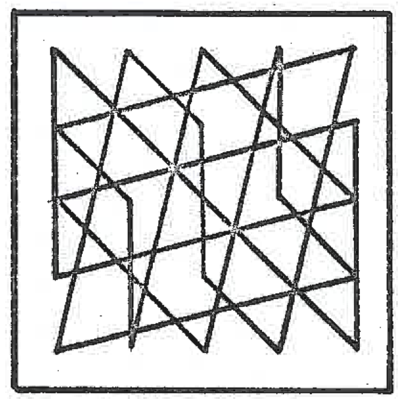


Fig. 28. Cuadrado mágico de cinco y su línea mágica.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

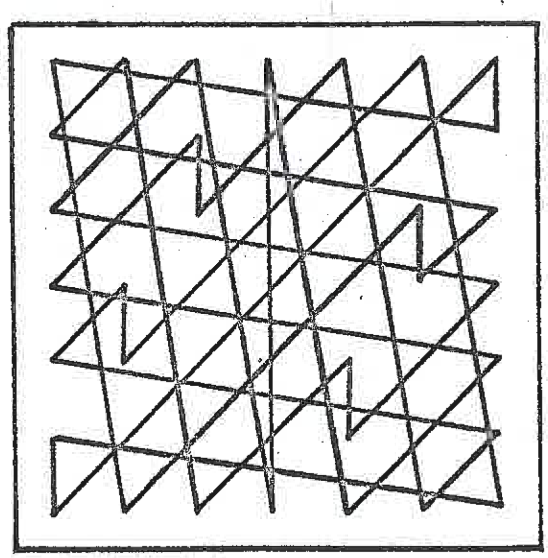


Fig. 29. Cuadrado mágico de siete y su línea mágica.

Fórmas algebraicas en el arte. (9).

Algunos matemáticos, partidarios de la idea de que las matemáticas además de una ciencia son un arte, han tratado de mostrar la belleza de las matemáticas mediante la construcción de diseños y sólidos basados en formas algebráicas. El principal impulsor de esta corriente, el Dr. Jekuthiel Ginsburg, editor de "Scripta Mathematica", exhibió en los principales museos de arte moderno de los Estados Unidos los trabajos de sus colaboradores; Hermann Baravalle, matemático del Adelphi College de Nueva York; Rutherford Boyd y Maurice El-Milick.

Los diseños de Baravalle se basan en espirales logaritmicas, curvas catacausticas (las reflejadas por el interior de un objeto redondo), elipses, hipérboles, parábolas y circunferencias. Uno de sus primeros trabajos, un diseño hecho por medio de líneas tangentes a una elipse fué distribuído, junto con algunas otras de sus obras, en las facultades de matemáticas de los Estados Unidos con el fin de aumentar el interés de los estudiantes y explicarles algunas ideas difíciles en términos simples.

Boyd construye sus esculturas mediante curvas cónicas y líneas que aumentan según proporción logarítmica. También hizo una película matemática titulada "Parábola". Y el diseño de un tubo de crema dental basándose en las intersecciones entre parábolas y circunferencias.

El matemático egipcio El-Milick construyó esculturas similares a las de Boyd, pero basadas exclusivamente en fórmulas algebraicas. Una de las pocas esculturas que no fueron destruídas en París durante la segunda guerra aparece una rejilla y tiene por fórmulas: $y=\pm\ e^2(a^2-x^2)\ -z^2$

$$y=\pm\ p(x\ v)\pm\ e^2(a^2-x^2)\ -(z\pm v\pm v')^2$$

En la figura 30 se muestran dos de los diseños mas simples que produjo El-Milick.

---

(9) "Speaking of pictures" Life. Vol. 26, número 12. (Marzo 12, 1949) págs. 17-20.

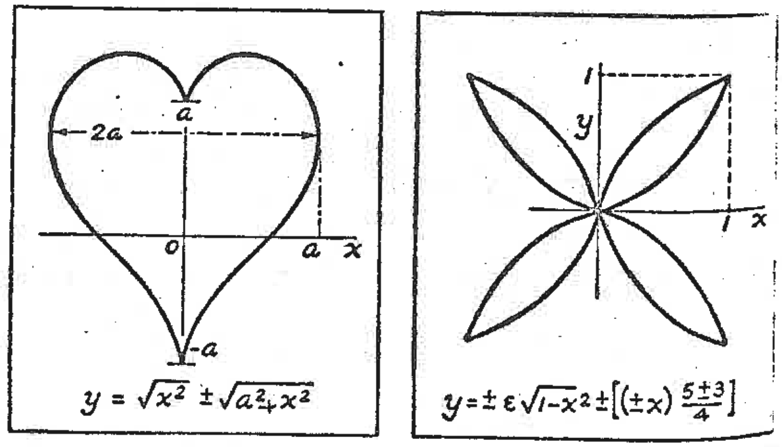


Fig. 30. Corazón y Flor, dos diseños de Maurice El-Milick.

Conclusión.

En el alba de una civilización de ocio, el sentido mismo del arte ha cambiado. Las Matemáticas, y en especial la permutación, definen un campo de posibilidades muy grande que puede dar una nueva razón de ser al arte. El arte estará unido a una serie de reglas que constituyen "la idea". El artista creará la idea, y la obra será realizada por máquinas o por el propio consumidor.

Pero olvidando la socialización del arte, las matemáticas nos ofrecen campos infinitamente más poblados que nuestra propia imaginación, en los que encontraremos realidades e irrealidades nunca soñadas.

Bibliografía.

Las obras marcadas con "o" se consultaron para el trabajo.

o Antonino, José. La composición en el dibujo y la pintura. (Barcelona: Ediciones Ceac, 1969).

o Bachelard, Gaston. La poética del espacio. (México: Fondo de Cultura Económica, 1965).

o Benthall, Jonathan. Science and technology in art today. (London: The World of Library, 1973).

o Blunt, Anthony. La théorie des arts en Italie de 1450 á 1600. (París: Seuil, 1953).

o Bragdon, Claude. Proyective ornament. (Nueva York: A. Knopf, ed. 1915).

o Cardellach, Félix. Las formas artísticas de la arquitectura técnica. (Barcelona: Librería de Agustín Bosch, no hay fecha).

o Chierici, Gino. Palladio: 1508-1580. (París: Librairie A. Hartier, 1956).

o Choay, Francoise. Masters of world architecture: Le Corbusier. (Nueva York: George Braziller, Inc., 1960).

o Cresti, Carlo. Le Corbusier. (Barcelona: Adiciones Nauta, 1971).

o Dalí, Salvador. Cincuenta secretos mágicos para pintar. (Barcelona: Luis de Caralt, editor. 1951).

o Da Vinci, Leonardo. Tratado de la pintura. (Buenos Aires: Talleres gráficos Optimus, 1945).

o Eco, Umberto. La definición del arte. (Barcelona: Martínez Roca, 1972).

o Gardner, Martin. Izquierda y derecha en el comos. (Navarra: Salvat editores, 1972).

o Gardner, Martin. Nuevos pasatiempos matemáticos. (Madrid: Alianza Editorial, 1972).

o Ghyka, Matila C. Estética de las proporciones en la naturaleza Y EN LAS ARTES.(Buenos Aires: Editorial Poseidón, 1953).

Ghyka, Matila C. El número de oro: Los ritos. (Buenos Aires: Editorial Poseidón, 1968).

Ghyka, Matila C. El número de oro: Los ritmos.(Buenos Aires: Editorial Poseidón, 1968).

Ghyka, Matila C. The geometry of art and life. (Nueva York: Sheed and Ward, 1946).

o Gil Tovar, Francisco. <u>Historia del arte e iniciación al conocimiento de los estilos</u>.(Bogotá: Bibliográfica Colombiana, 1965).

o Gil Tovar, Francisco. <u>Introducción al arte</u>.(Bogotá: Fondo Rotatorio de la Policía Nacional, 1969).

o Gil Tovar, Francisco. <u>Principios y elementos de las artes plásticas</u>. (Bogotá: Ediciones Paulinas, 1970).

o Hambridge, Jay. <u>The elements of dynamic symmetry</u>. (Nueva York: Dover Publications, 1967).

Herbert, Frank. <u>Kunst und konstruktion</u>. (Munich: Verlag F. Bruckman, 1957).

o Holt, Michael. <u>Mathematics in art</u>. (Gouda (Holanda): Drukkerij Rechame, 1971).

o Holz, Hans Heinz y otros. <u>Entrevistas con Lukacs</u>. Madrid: Alianza Editorial, 1969).

o Ivins, William. <u>Art and geometry</u>. (Cambridge: University Press, 1946).

o Jouven, Georges. <u>Rythme et architecture: Les tracés harmoniques</u>. (París: Editions Vincent, 1951).

o Kandinsky, Wassily. <u>Punto y línea frente al plano</u>. (Buenos Aires: Editorial Nueva Visión. 1959).

o Kandinsky, Wassily. <u>On the spiritual in art</u>. (Nueva York: Hilla Rebay Editor, 1946).

o Kepes, Gyorgy. ed. <u>Module, proportion, symmetry, rhythm</u>. (New York: George Braziller, 1966).

o Kepes, Gyorgy. ed. <u>Structure in art and science</u>.(New York: George Braziller, 1965).

o Klee, Paul. <u>Theorie de l 'art moderne</u>. (Amsterdam: Biblioteque Mediations, 1965).

o Klopfer, Bruno y Helen Davidson. <u>Técnica del Rorschach</u>. (Buenos Aires: Editorial Paidós, 1969).

o Leach, Edmund. <u>Lévi-Strauss: antropólogo y filósofo</u>.(Barcelona: Editorial Anagrama, 1970).

o Le Corbusier. <u>Le Modulor</u>. (París: Editions de l 'architecture d'aujourd'hui, 1950).

o Le Corbusier. <u>Le Modulor, 2</u>. (París: Editions de l'architecture d'aujourd'hui, 1955).

o Le Corbusier. The radiant city. (Nueva York: The Orion Press, no hay fecha).

o Le Corbusier. The Modulor: A harmonious measure to the human scale, universally applicable to architecture and mrchanics. (Cambridge: University Press, 1954).

o Le Corbusier. Manera de pensar la urbanística. (Barcelona: Editorial Visión, 1959).

o Marx, Carlos y Federico Engels. Escritos sobre arte. (Barcelona: Editorial Península, 1969).

o Masini, Lara V. Antoni Gaudí. (Barcelona: Ediciones Nauta, 1970).

o Michel, Paul Henri. La pensée de Leon Battista Alberti. (París: Editions Gallimard, 1930).

o Moles, Abraham. Art et ordinateur. (Belgique: Syntheses Contemporaines Casterman, 1971).

o Munari, Bruno. Discovery of the square.

o Munari, Bruno. Discovery of the circle.

o Palladio, Andrea. The four books of architecture. (New York: Dover Publications, Inc., 1965).

o Piaget, Jean. Seis estudios de psicología. (Barcelona: Barral Editores, 1973).

o Reichardt, Jasia. The computer in art. (Gouda, Holanda: Drukkerij Rechame, 1971).

Rengifo, Luis Angel. La proporción armónica de la estatuaria agustiniana. (Bogotá: Facultad de artes, Universidad Nacional de Colombia. no hay fecha).

o Riemann, Hugo. Teoría general de la música. (Barcelona: Editorial Labor, 1928).

o Roos, Frank J., Jr. An illustrated handbook of art history. (New York: The Macmillan Company, 1949).

o Sas-Zaloziecky, Wladimir. Arte Bizantino. (Bilbao: Ediciones Moretón, 1967).

Schielinger, Joseph. The mathematical basis of the arts. (New York: Philosophical Library, 1948).

o Scholfield, P.H. Teoría de la Proporción en arquitectura. Barcelona: Editorial Labor, 1971).

Thomson, Wentworth. On growth and form. (Cambridge: University Press, 1948).

o Van Loon, Hendrick Willem. Las Artes. (Barcelona: Luis Miracle editor, 1950).

o Vitruvio, Marco Lucio. Los diez libros de la arquitectura. (Barcelona: Editorial Iberia, 1955).

o Warusfel, André. Los números y sus misterios. (Barcelona: Ediciones Martínez Roca, 1968).

o Weyl, Hermann. La simetría. (Buenos Aires: Editorial Nueva Visión, 1958).

o Wittkower, Rudolf. Architectural Principles in tha age of humanism. (New York: Random House, 1965).

o Zevi, Bruno. Saber ver la arquitectura. (Buenos Aires: Editorial Poseidon, 1971).

Revistas.

Bill, Max. "Die mathematische Denkweise inder Kunst unserer Zeit". Werk. Vol. 36. Zurich. (Marzo, 1949).

o Duncan, David R. y Bonnie Litwiller. "A simple sorting - sequence". Mathematics Techer. Vol. , número . Nueva York (Abril, 1974).

o Forseth, Sonia y Andria Pricetroutman. "Using mathematical structures to generate artistic designs". The Mathematics. Vol. 67, número 5.

Gardner, Martin. "Mathematical Games". Scientific American, Vol. 229, número 5. Nueva York, (Noviembre, 1973).

Gardner, Martin. "Mathematical Games". Scientific American, Vol. 223, número 4. Nueva York, (Octubre, 1970).

Giacometti, Alberto. "1+1=3...". Trans/formation. Vol.1, número 3. (Nueva York. Diciembre, 1952).

Liedholm, Alf. "Form och objektivitet". Form, número 314. Estocolmo (Junio, 1958).

o Teeters, Joseph L. "How to draw tessellations of the Escher type". The Mathematics Teacher. Vol. 67, número 4. Nueva York, (Abril, 1974).

o Teuber, Marianne L. "Sources of ambiguity in the prints of Maurits C. Escher". Scientific American, Vol. 231, número 1. Nueva York, (Julio, 1974).

o --------- "Speaking of Pictures". Life. Vol. 26, número 12. Nueva York. (Marzo, 1949).

o ---------- "Designs from the Mathematicians". Portfolio Cincinnatti. Vol.1, número 1. Cincinnatti, (Diciembre, 1950).

o ----------- "Le Corbusier". L'Architecture d'aujourd'hui. Número fuera de serie. París 1950).